

# **ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООБМЕНА**

Методическое руководство.  
Составители: Хейфец Л.И., Окунев Б.Н.

Москва 1999 г.

## 1. ВВЕДЕНИЕ.

Химическая технология рассматривает химические реакции не только на молекулярном, но и на макроскопическом уровне. Эффективность реакции в макроскопическом объеме - химическом реакторе - обусловлена распределением температуры и концентрации во времени и пространстве. В химико-технологических системах разнообразные тепло- и массообменные аппараты выполняют функции создания требуемых температурных и концентрационных полей. Кроме того, благодаря перераспределению с их помощью массовых и энергетических потоков решаются задачи повышения эффективности химического производства.

В данном пособии решаются задачи определения интегральных характеристик процессов теплообмена (коэффициентов теплообмена) в реальных системах.

### 1.1. Цель работы:

- выработка навыков вывода дифференциальных уравнений теплового и материального балансов;
- знакомство с понятиями безразмерного уравнения и критериев подобия;
- выбор характерных масштабов при обезразмеривании уравнений;
- знакомство с понятиями критериев Нуссельта, Стентона, коэффициентов тепло- и массообмена;
- экспериментальное определение коэффициентов теплообмена в реальных системах.

## 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ТЕПЛО- И МАССОБМЕНА.

### 2.1. Потоки и коэффициенты переноса.

Выражения, используемые в макрокинетических моделях для описания локальных потоков тепла  $\mathbf{q}$  и вещества  $\mathbf{j}_i$ , основываются на предположении об аддитивности вкладов различных механизмов в процессы переноса. Транспортные феноменологические уравнения включают молекулярный перенос в форме законов Фурье (для тепла) или Фика (для вещества) и конвективный перенос, величина которого в каждой точке среды пропорциональна локальной скорости  $\vec{V}$  движения среды как целого:

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\lambda \cdot \text{grad}T + c_p \rho \vec{V}T \quad (2.1)$$

$$\mathbf{j}_i(\mathbf{r}, t) = -D_i \cdot \text{grad}C_i + \vec{V}C_i \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{r}$ -радиус-вектор рассматриваемой точки,  $t$ -время,  $c_p$  - теплоемкость,  $\lambda$  - теплопроводность,  $\rho$  - плотность,  $T$  - температура.

Размерности локальных потоков:

- тепла  $\mathbf{q}$ , ватт/м<sup>2</sup>; кал/сек м<sup>2</sup>
- вещества  $\mathbf{j}_i$ , моль/сек м<sup>2</sup>; кг/сек м<sup>2</sup>.

Интегрируя (2.1) или (2.2) по поверхности, можно вычислить переносимые через рассматриваемую поверхность полные потоки тепла  $\mathbf{Q}$  или вещества  $\mathbf{J}$ . Существенно, что для решения задачи необходимо знать гидродинамическую структуру, т.е. поле скоростей среды  $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t)$ .

## 2.2. Внутренняя и внешняя задачи.

Определение поля скоростей среды  $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t)$  во многих практически важных случаях наталкивается на непреодолимые трудности вследствие многих причин: сложной геометрии системы, неустойчивого характера течения. При теоретическом анализе структуры потоков в макрокинетических моделях, описывающих транспортные явления с участием твердых тел и флюидов, можно выделить две принципиально разные задачи:

- **внутренняя задача**; типичный пример - течение флюида в трубе, когда между длиной трубы  $L$  и диаметром  $d$  имеет место соотношение  $L/d \gg 1$ ;
- **внешняя задача**; типичный пример - обтекание флюидом твердого тела, характерный размер которого  $d$  значительно уступает характерному размеру области набегающего потока. Сюда же можно отнести часто встречающиеся при моделировании электрохимических процессов в задачах о натекании потока электролита на пластину электрода.

Отличие двух задач имеет геометрическую природу:

- во **внутренней задаче** естественный характерный масштаб системы - это диаметр трубы, т.е. размер области течения ограничен.
- во **внешней задаче** естественный характерный масштаб системы - это размер тела, а размер области течения неограничен.

Различие в геометрии обуславливает различие в характере течений.

- **Во внутренней задаче** реально существуют два режима течения, между которыми имеется резкая граница. *Ламинарный режим* течения, когда существует аналитическое решение и поле скоростей в трубе подчиняется известному закону Пуазейля. *Турбулентный режим*, когда область течения можно разбить на две характерных подобласти - тонкий слой, прилегающий к поверхности твердого тела, внутри которого происходит основное изменение скорости течения, и ядро потока, внутри которого скорость остается практически постоянной. Смена одного режима течения другим при изменении параметров течения происходит практически скачкообразно (это явление получило название кризис течения).
- **Во внешней задаче** тоже говорят о ламинарном и турбулентном режимах течения, но в этом случае речь идет о понятиях, используемых при теоретической интерпретации асимптотического поведения математического описания течения в области малых и больших значений числа Рейнольдса (о числе Рейнольдса речь пойдет ниже).

Конечно, деление гидродинамических задач на **внешние** и **внутренние** в определенной мере условно и не отражает все многообразие явлений, встречающихся в технологической практике. Например, поведение текущего внутри трубы потока флюида на начальном участке трубы больше похоже на поведение потока, набегающего на твердую пластину. Только, когда поток пройдет в трубе расстояние в несколько калибров (диаметров), установится режим течения, рассматриваемый во внутренней задаче. Часто приходится иметь дело с задачами, когда структура потока обусловлена неоднородной геометрией среды. Например, куда отнести задачу о фильтрации флюида через пористую матрицу с хаотической структурой пространства пор? Или

задачи, которые приходится решать при моделировании явлений в псевдооживленном слое катализатора или в барботажном реакторе? В этих явлениях присутствуют черты как внешней (обтекание потоком флюида элемента пористой среды, частицы катализатора, пузырька газа), так и внутренней задач (фильтрация в элементарной поре, между частицами катализатора или между газовыми пузырьками).

Эти задачи отличает соизмеримость характерных размеров твердого тела (частицы сорбента, зерна катализатора) или газового включения (пузырька, поры) и области течения, оказывающей непосредственное влияние на процессы переноса между флюидом и твердой частицей или между жидкостью и пузырьком газа. Именно в этом одна из причин затруднений при теоретическом анализе многих практически важных систем. Другая причина заключается в переходе на макроскопический уровень описания, т.е. в выборе масштаба осреднения закономерностей течения, полученных при анализе проблемы на масштабе отдельного пузырька, элементарной поры, частицы катализатора. Наконец, характеристики рассматриваемой системы во многих практически важных случаях испытывают флуктуации, величина которых соизмерима с осредняемой величиной. В качестве примера сошлемся на структуру газового потока и потока взвешенных частиц в псевдооживленном слое, структуру потоков газа и жидкости в барботажном слое. Конечно, современные вычислительные комплексы и продвинутое методы решения уравнений отодвигают границы возможностей количественного анализа в сторону все более сложных геометрии и характера течения среды, но принципиальные трудности остаются теми же самыми.

### 2.3. Коэффициенты переноса.

В сложившейся практике анализа макрокинетических задач при описании процессов переноса часто используют накопленные в литературе многочисленные экспериментальные данные и полуэмпирические соотношения, отражающие наши интуитивные представления о движущих силах и потоках:

- поток  $q$  пропорционален разности температур  $\Delta T$

-

$$q = \alpha \cdot \Delta T \quad (2.3)$$

- поток  $j$  пропорционален разности концентраций  $\Delta C$

$$j = \beta \cdot \Delta C \quad (2.4)$$

Соотношения (2.3) и (2.4) не являются законами природы. Их следует рассматривать только как **определения** некоторых интегральных характеристик явления переноса, называемых **коэффициентами теплообмена  $\alpha$**  и **массообмена  $\beta$** . При этом основной оказывается задача установления связи между указанными коэффициентами и характеристиками среды.

### 2.4. Безразмерные уравнения в макрокинетических задачах.

Исходные положения анализа размерностей звучат подкупающе просто:

- **физические законы не должны зависеть от выбора системы единиц;**
- **отношение двух численных значений данной размерной величины не должно зависеть от выбранных масштабов.**

Поэтому выбор масштабов остается в нашей власти, и мы можем унифицировать анализ сходных задач. Те масштабы, с которыми мы встречаемся в повседневной практике – метр, секунда, килограмм – не всегда удобны при анализе некоторых явлений. Например, если поток газа или жидкости обтекает сферу, то естественным масштабом длины для данного явления является диаметр сферы. Если поток флюида течет внутри трубы, то естественным масштабом длины является диаметр трубы. Если нас интересуют условия теплообмена в произвольной точке, удаленной на некоторое расстояние от края пластины, на которую набегают поток флюида, то в качестве характерного масштаба длины следует принять это расстояние. Если теплообмен осуществляется между двумя частями рассматриваемой системы с температурами  $T_1 > T_2$ , то естественным масштабом для температуры является величина  $(T_1 - T_2)$ , а ноль на шкале температур можно перенести в точку  $T_2$ . Выбрав соответствующим образом характерные масштабы для переменных величин, входящих в анализируемую задачу, после замены переменных мы получим уравнение, в котором все **постоянные коэффициенты** будут иметь одинаковую размерность. Деля обе части уравнения на один из таких коэффициентов, получим так называемое уравнение в безразмерной форме.

В качестве примера рассмотрим течение флюида в некоторой области. Основные параметры флюида - это динамическая вязкость  $\mu$ , плотность  $\rho$ , теплопроводность  $\lambda$ , теплоемкость  $c_p$ . Пусть рассматриваемая область течения имеет характерный размер  $d$ , а внутри этой области течение имеет характерную скорость  $V$ . Поэтому после выбора соответствующих масштабов в безразмерном уравнении конвективной диффузии или конвективной теплопередачи могут появиться следующие безразмерные параметры:

$$\text{Число Рейнольдса} \quad \text{Re} = \frac{V d \rho}{\mu} = \frac{V d}{\nu} \quad (2.5)$$

$$\text{Число Прандтля} \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{\chi} \quad (2.6)$$

$$\text{Число Шмидта} \quad \text{Sc} = \frac{\mu}{\rho c_p D} = \frac{\nu}{D} \quad (2.7)$$

Отдельные комбинации таких параметров имеют самостоятельные названия. Например, произведения **Re·Pr** или **Re·Sc**, широко используемые в физико-химической литературе, называют числами Пекле **Pe** - тепловым **Pe<sub>T</sub>** или диффузионным **Pe<sub>D</sub>**:

$$\text{Pe}_T = \text{Re Pr} = V d / \chi \quad (2.8)$$

$$\text{Pe}_D = \text{Re Sc} = V d / D \quad (2.9)$$

**Замечание.** При анализе задачи бывает полезно безразмерные параметры представить в виде отношения характерных времен отдельных стадий процесса. В частности, параметр Пекле есть отношение характерного времени переноса вследствие молекулярной диффузии (теплопроводности)  $d^2/D$  ( $d^2/\chi$ ) к характерному времени переноса вследствие конвекции  $d/V$ .

## 2.5. Число Нуссельта.

Безразмерный коэффициент теплообмена  $\alpha$ , выраженный в единицах  $\lambda/d$ , называют числом (параметром) Нуссельта:

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} \quad (2.10)$$

Число Нуссельта удобно использовать, когда преобладает молекулярный механизм переноса тепла.

Иногда удобно величину коэффициента теплообмена  $\alpha$  выразить в единицах  $V c_p \rho$ . Соответствующий безразмерный параметр иногда называют числом Стэнтона

$$St = \frac{\alpha}{V c_p \rho} \quad (2.11)$$

Число Стэнтона удобно использовать в случае преобладания конвективного механизма переноса.

Аналогичным образом вводят безразмерные коэффициенты массообмена; в частности диффузионное число Нуссельта

$$Nu = \beta d/D. \quad (2.12)$$

Получение теоретически или на основе обработки экспериментальных данных обобщенных функциональных зависимостей числа Нуссельта от безразмерных чисел, характеризующих структуру течения, является одной из главных задач теории размерностей или теории подобия. Во многих справочных руководствах можно найти десятки выражений типа

$$f(Nu, Re, Pr)=0 \quad (2.13)$$

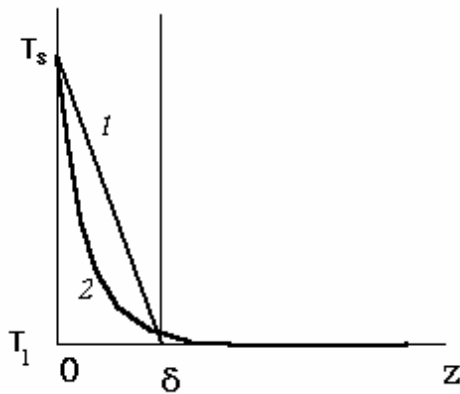
Искусство исследователя состоит в правильном выборе выражения типа (2.13) с учетом действительного подобия анализируемой задачи тем, которые послужили основой данного выражения.

## 2.6. Пограничный слой.

Существуют полезные представления, помогающие упростить математический анализ рассматриваемого явления, не теряя присущих этому явлению основных закономерностей. Одним из таких представлений является понятие о пограничном слое. В реальных условиях взаимодействия возмущенного потока флюида и твердого тела структуру области потока можно представить как состоящую из основного хорошо перемешиваемого по конвективному механизму ядра и тонкого слоя, прилегающего к твердой поверхности обтекаемого тела. Именно внутри этого слоя и сосредоточено основное изменение количественных характеристик потока (скорости, температуры, концентрации). Пространственную область, в которой сосредоточено основное изменение какой-либо величины, в физико-математической литературе называют

**пограничным слоем.** В частности, при обтекании твердого тела с температурой поверхности  $T_s$  потоком флюида с температурой  $T_1$  практически весь перепад температуры реализуется внутри этого приповерхностного слоя (рис. 1, кривая 2). Причина возникновения областей с большими градиентами - смена механизмов переноса, ответственных за основной вклад в транспортное явление. В данном конкретном случае речь идет о конкуренции молекулярного и конвективного механизмов переноса тепла.

В процессах переноса тепла речь идет о температурном пограничном слое, но более употребительное выражение - тепловой пограничный слой. В процессах массопереноса аналогичная величина получила название диффузионного слоя.



**Рис. 1. К определению толщины теплового пограничного слоя.**

Естественно определить толщину температурного пограничного слоя как такую, для которой выполнены следующие условия:

- на границах слоя температуры равны, соответственно,  $T_s$  и  $T_1$ ;
- в слое преобладает молекулярный механизм переноса тепла;
- характерное время переноса тепла через слой много меньше времени изменения температур  $T_s$  и  $T_1$ . Последнее условие означает квазистационарность температурного профиля внутри пограничного слоя.

Для потока тепла через пограничный слой, исходя из перечисленных условий и соотношений (2.1) и (2.3), получаем

$$q = \lambda \Delta T / \delta = \alpha \Delta T \quad (2.14)$$

Здесь  $\Delta T = T_s - T_1$ . Следовательно, из (2.14) следует, что толщина слоя  $\delta$  может быть выражена через коэффициент теплообмена  $\alpha$  и теплопроводность  $\lambda$ :

$$\delta = \frac{\lambda}{\alpha} \quad (2.15)$$

а из (2.10) и (2.14) - через значение Нуссельта и характерный линейный масштаб системы  $d$ :

$$\delta = \frac{d}{Nu} \quad (2.16)$$

Таким образом, число Нуссельта есть отношение двух характерных масштабов явления - геометрического, т.е. характерного размера системы, и внутреннего, обусловленного протекающим в системе процессом, т.е. толщиной температурного пограничного слоя.

### 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИССЛЕДУЕМОГО ПРОЦЕССА

#### 3.1. Постановка задачи.

Предлагается определить коэффициенты теплообмена в следующей системе (рис. 2). Имеется два объема (термостата) 1 и 2, заполненные водой. Каждый термостат снабжен пропеллерной мешалкой, обеспечивающей интенсивное перемешивание жидкости, так, что в любой момент можно считать, что в объеме отсутствуют градиенты температур. В системе имеется циркуляционный контур, состоящий из металлического змеевика 3 и насоса 4. Этот контур обеспечивает возможность нагрева или охлаждения жидкости во втором объеме, используя жидкость из первого объема. В термостате 1 имеется нагреватель 5 регулируемой мощности, служащий для достижения необходимой температуры в первом термостате перед началом эксперимента или для поддержания температуры в первом термостате во время эксперимента. В условиях нашей системы процесс передачи тепла от нагревателя к жидкости не является лимитирующим.

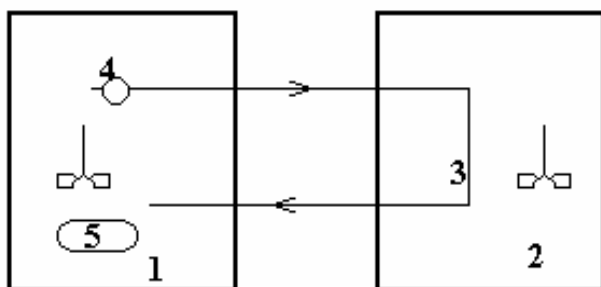


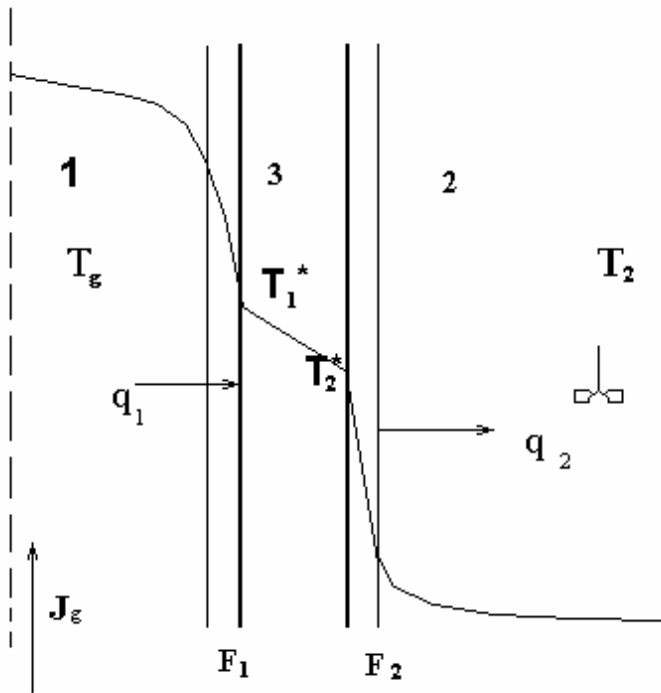
Рис. 2. Схема экспериментальной установки. 1, 2 - теплоизолированные емкости (термостаты), снабженные мешалкой. Циркуляционный контур, включающий змеевик 3 и насос 4. Нагреватель - 5.

Параметры системы: масса жидкости в термостатах  $M_1$  и  $M_2$ , начальные температуры жидкостей  $T_1^0$  и  $T_2^0$ , длина теплообменной части змеевика равна  $L$ , радиус трубки змеевика  $r$ , массовый расход жидкости в циркуляционном контуре  $J_g$ . Кроме того, известны характеристики обеих жидкостей: теплоемкости  $c_i$ , плотности  $\rho_i$ , вязкости  $\mu_i$ , теплопроводности  $\lambda_i$ .

#### 3.2. Анализ явлений теплообмена между текущей в трубке горячей жидкостью из первого термостата и нагреваемой жидкостью во втором термостате.

Рассмотрим теплообмен между текущей в трубке горячей жидкостью и нагреваемой жидкостью во втором термостате. Этот процесс состоит из нескольких последовательных стадий: перенос тепла внутри трубки через горячую жидкость к стенке, перенос тепла через стенку трубки, перенос тепла от стенки трубки к холодной жидкости (рис. 3).





**Рис. 3. Схема профиля температуры в произвольном сечении трубки змеевика.**

Пусть интенсивность перемешивания жидкости в трубке змеевика и в объеме термостата такова, что основное изменение температуры сосредоточено внутри пограничных слоев  $F_1$  и  $F_2$ , примыкающих к стенке трубки внутри и снаружи. Следовательно, температура жидкости в сечении  $z$  трубки вплоть до начала пограничного слоя  $F_1$  практически постоянна и равна  $T_g(z)$ . Соответственно, температура жидкости в объеме также постоянна вплоть до начала пограничного слоя  $F_2$ . Считаем, что время установления квазистационарного линейного профиля температуры внутри показанных на Рис. 3 пограничных слоев  $F_1$  значительно меньше времени эксперимента, когда необходимо существенно изменить температуру термостата объемом в несколько литров. Примем также, что сопротивлением теплопереносу через тонкую металлическую стенку можно пренебречь

$$T_1^* = T_2^* = T^* \quad (3.1)$$

Тогда для потока тепла через слой  $F_1$  внутри трубки справедлива формула (2.3)

$$q_1 = -\alpha_1(T_1^* - T_g) \quad (3.2)$$

Аналогичное выражение справедливо для потока тепла через слой  $F_2$ :

$$q_2 = -\alpha_2(T_2 - T_2^*) \quad (3.3)$$

Из условия квазистационарности  $q_1 = q_2$  получаем выражение для определения температуры стенки  $T^*$ :

$$T^* = (T_g \alpha_1 + T_2 \alpha_2) / (\alpha_1 + \alpha_2) \quad (3.4)$$

Подставляя выражение для  $T^*$  в одну из формул (3.2) или (3.3), получим выражение для величины потока тепла  $q$  от одной жидкости к другой:

$$q = q_1 = q_2 = \alpha (T_g - T_2) \quad (3.5)$$

Эффективный коэффициент теплообмена  $\alpha$  выражается через коэффициенты теплопередачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  по формуле

$$1/\alpha = 1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 \quad (3.6)$$

После прохождения змеевика нагревающая жидкость возвращается в первый термостат, где практически мгновенно смешивается с находящейся там жидкостью. Вследствие этого температура входящей в змеевик жидкости всегда равна температуре жидкости в объеме первого термостата.

Уравнение энергетического баланса для жидкости в первом термостате будет выведено ниже.

### 3.3. Оценка коэффициентов теплообмена.

Чтобы количественно оценить коэффициенты теплообмена  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  или, что тоже самое, соответствующие критерии Нуссельта, следует проанализировать гидродинамическую обстановку и свойства среды. Следует также вспомнить приведенные в разделе 2.2 соображения о двух типах задач – внутренней и внешней.

**Внутренняя задача.** Оценить характер течения жидкости внутри трубки можно, вычислив значение числа Рейнольдса (2.5). В нашем случае диаметр трубки равен 0.7 см, скорость течения жидкости определяем прямым измерением, используя секундомер и мерный цилиндр, вязкость жидкости следует взять из справочника (при этом следует иметь в виду, что критическое значение числа Рейнольдса зависит от формы змеевика). Для прямой трубки критическое число Рейнольдса равно 2200.

Имеется большое число исследований процесса теплообмена для внутренней задачи, результаты которых систематизированы в виде полуэмпирических формул. Для ламинарного режима течения жидкости в трубке при  $Pe \cdot d/L > 50$  получено точное аналитическое выражение:

$$Nu = 1.615 (Re Pr d/L)^{1/3}$$

Для других случаев в литературе имеется много полуэмпирических формул типа (2.13). Приведем часто используемое соотношение для определения числа Нуссельта при течении в трубе в случае турбулентного режима (при  $Re > 10^4$ ):

$$Nu \cong 0.03 Re^{0.8} Pr^{0.43}$$

**Внешняя задача.** Аналогичным образом следует оценить характер течения жидкости в объеме термостата вокруг змеевика. Прежде всего, мы должны оценить характерную скорость течения жидкости и характерный масштаб области течения. В качестве характерного масштаба при вычислении числа  $Nu$  следует выбрать характерный размер области, занимаемой жидкостью. В данном случае это размер термостата  $d_T$ . Конструктивные особенности нагреваемого аппарата приводят нас к необходимости при вычислении числа Рейнольдса оценивать скорость течения жидкости так же, как и во внутренней задаче, а в качестве характерного размера брать величину  $d_T$ .

Для случая внешней задачи в литературе также имеется много формул типа (2.13). Приведем одну из них:

$$Nu \approx 0.9 Re^{0.62} Pr^{0.33}.$$

#### 3.4. Математическая модель процесса теплообмена между текущей в трубке горячей жидкостью и нагреваемой жидкостью во втором термостате.

Выведем дифференциальные уравнения, которые описывают изменение температуры жидкости в трубке змеевика и в объеме нагреваемой жидкости.

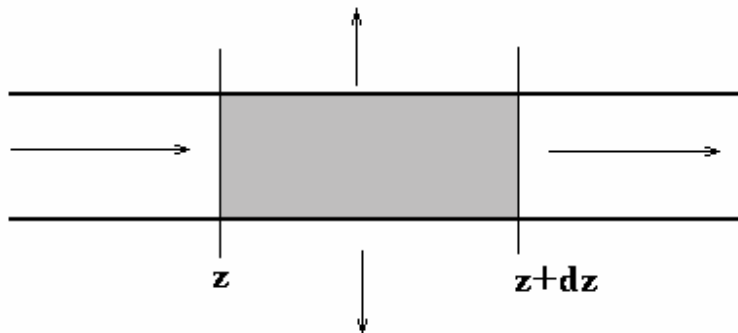


Рис. 4. К выводу уравнения теплового баланса для элемента трубки, по которой течет нагревающая жидкость. Стрелками показаны тепловые потоки.

Температура нагревающей жидкости  $T_g$  внутри змеевика в рассматриваемый момент времени  $t$  изменяется в каждой точке  $Z$  трубы (координатная ось направлена вдоль трубы) вследствие теплообмена с внешней жидкостью. Соответственно, изменяется температура  $T_2$  нагреваемой жидкости, которую вследствие интенсивного перемешивания можно рассматривать как имеющую одинаковую температуру во всем объеме (условие однородности нагреваемой жидкости). Рассматривая изменение внутренней энергии в элементе трубки, ограниченном координатами  $Z$  и  $Z+dz$ , в интервале времени между  $t$  и  $t+dt$  (рис. 4) и следуя определению теплового потока (3.5), получим систему уравнений теплового баланса в виде:

$$c_1 J_g \frac{\partial T_g}{\partial z} + c_1 \rho_1 \pi r^2 \frac{\partial T_g}{\partial t} = 2 \pi r \alpha (T_2 - T_g) \quad (3.7)$$

$$c_2 M_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 2 \pi r \alpha \int_0^L dz (T_g - T_2) \quad (3.8)$$

Начальные и граничные условия соответствуют условиям постановки эксперимента - на входе в змеевик температура жидкости всегда равна температуре жидкости в термостате 1, а температура во 2-м термостате в начале эксперимента равна  $T_2^0$ :

$$\begin{aligned} T_g(z=0, t) &= T_1(t) \\ T_2(t=0) &= T_2^0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

причем  $T_1(t) > T_2^0$ . Кроме того, обозначим температуру жидкости в первом термостате перед началом эксперимента через  $T_1^0$ .

### 3.5. Безразмерная форма уравнений теплообмена между текущей в трубке горячей жидкостью и нагреваемой жидкостью во втором термостате.

Выберем следующие масштабы для переменных, входящих в уравнения: (3.7) - (3.9):

- температура:  $(T_1^0 - T_2^0)$ ; сдвинем ноль на шкале температур в точку  $T_2^0$ ;
- длина:  $h = c_1 J_g / (2 \pi r \alpha)$ ; назовем эту величину высотой единицы переноса;
- время:  $t_\alpha = C_2 M_2 / (2 \pi r L \alpha)$ ; это время, которое необходимо для нагрева жидкости массой  $M_2$  путем теплообмена с трубкой длиной  $L$  и радиусом  $r$  при постоянной движущей силе, т.е. выбранный масштаб времени является характерным для рассматриваемого процесса.

Новые безразмерные переменные будут иметь вид:

- температура жидкости в трубе  $\theta_g = (T_g - T_2^0) / (T_1^0 - T_2^0)$ ;
- 
- температура жидкости в объеме  $\theta_2 = (T_2 - T_2^0) / (T_1^0 - T_2^0)$ ;
- 
- температура жидкости в горячем термостате  $\theta_1 = (T_1 - T_2^0) / (T_1^0 - T_2^0)$ ;
- 
- длина  $\eta = z/h$ ;
- 
- время  $\tau = t/t_\alpha$ .

Нетрудно убедиться, что при обезразмеривании уравнений (3.7) - (3.9) перед производной по времени от температуры внутри трубки появится коэффициент  $\tau_{\text{рел}} = (c_g \rho_g / c_2 \rho_2) \cdot (\text{объем трубки} / \text{объем термостата})$ . Поскольку  $\tau_{\text{рел}} \ll 1$ , в уравнениях опустим член, содержащий

производную по времени от температуры жидкости внутри змеевика, т.е. не будем учитывать переходные процессы на временах порядка  $0 < \tau < \tau_{\text{рел}}$ . Это значит, что спустя время  $\tau_{\text{рел}}$  система релаксирует, т.е. “забывает” начальное распределение температуры, и внутри трубки устанавливается квазистационарный профиль  $\theta_g(\eta, \tau)$ . С учетом всего сказанного система уравнений (3.7) - (3.8) примет вид:

$$\frac{\partial \theta_g}{\partial \eta} = (\theta_2 - \theta_g) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = \frac{1}{N} \int_0^N d\eta (\theta_g(\eta, \tau) - \theta_2(\tau)) \quad (3.11)$$

с начальными и граничными условиями

$$\theta_g(\eta=0, \tau) = \theta_1(\tau), \quad \theta_2(\tau=0) = 0 \quad (3.12)$$

В уравнении (3.11) появился новый безразмерный параметр

$$N = 2\pi r \alpha L / c_1 J_g \quad (3.13)$$

называемый в физико-химической литературе **Number Transfer Unit (число единиц переноса в системе)**. Число единиц переноса пропорционально коэффициенту теплообмена  $\alpha$  и общей площади теплообмена.

### 3.6. Уравнение для изменения температуры во втором термостате.

В силу того, что дифференциальное уравнение (3.10) содержит только производную по пространственной переменной  $\eta$ , то в каждый фиксированный момент времени  $\tau$  уравнение (3.10) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение по переменной  $\eta$  относительно функции  $\theta_g$ . Решение такого уравнения представимо в виде суммы решения однородного уравнения с граничным условием (3.12) -  $\theta_1(\tau) \cdot \exp(-\eta)$ , и частного решения

$$\theta_2(\tau) (1 - \exp(-\eta)).$$

Таким образом, мы знаем распределение температуры по длине трубки:

$$\theta_g(\eta, \tau) = \theta_1(\tau) \cdot \exp(-\eta) + \theta_2(\tau) (1 - \exp(-\eta)). \quad (3.14)$$

Подставив это выражение в уравнение (3.11), получим уравнение, содержащее только температуры термостатов

$$\frac{d\theta_2}{d\tau} = \frac{(1 - \exp(-N))}{N} (\theta_1 - \theta_2) \quad (3.15)$$

#### 4. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

##### Определение коэффициента теплообмена в изолированной системе при выравнивании температур.

Нагреем воду в первом термостате перед началом эксперимента до некоторой температуры  $T_0^{(1)}$ . Температура воды во втором термостате в начале эксперимента равна  $T_0^{(2)} < T_0^{(1)}$ . При включенных мешалках в обоих термостатах включим насос циркуляционного контура и будем следить во времени за выравниванием температуры в этой изолированной системе. Данная задача является композицией частных случаев двух задач:

- задача в более холодном термостате 2 разобрана выше (3.10) – (3.12).

- задача в горячем термостате 1 несколько проще. Выходящая из змеевика в момент времени  $\tau$  частично остывшая вода с температурой  $\theta_g(N, \tau)$  смешивается с жидкостью в объеме термостата 1 с температурой  $\theta_1(\tau)$ . Перемешивание двух жидкостей с разной температурой (выходящей из змеевика и находящейся в объеме термостата) вследствие интенсивного перемешивания можно представить как практически мгновенное установление теплового равновесия между втекающей жидкостью и массой жидкости в объеме термостата. Из баланса внутренней энергии, который в данном случае сводится к балансу энтальпии, для рассматриваемого объема жидкости в термостате нетрудно получить, используя выражение (3.14), уравнение, описывающее изменение во времени температуры жидкости, находящейся в нем:

$$d\theta_1/d\tau = \mu(1 - \exp(-N))/N (\theta_2 - \theta_1) \quad (4.1)$$

$$\text{где } \mu = c_2 M_2 / c_1 M_1 \quad (4.2)$$

Таким образом задача сводится к системе уравнений (4.1), (3.15) с соответствующими начальными условиями:

$$\theta_1(0) = 1, \quad \theta_2(0) = 0 \quad (4.3)$$

Напомним, что индекс 1 относится к нагревающей жидкости (термостат 1, рис. 3), индекс 2 - к нагреваемой (термостат 2).

Система этих уравнений

$$d\theta_1/d\tau = \mu(1-\exp(-N))/N \cdot (\theta_2 - \theta_1)$$

$$d\theta_2/d\tau = (1-\exp(-N))/N \cdot (\theta_1 - \theta_2)$$

допускает простое решение. Действительно, домножим второе уравнение на  $\mu$  и сложим его с первым. Получим

$$\frac{d(\theta_1 + \mu\theta_2)}{d\tau} = 0$$

Решение этого уравнения с учетом начальных условий (4.3) имеет вид:

$$\theta_1 + \mu\theta_2 = 1 \quad (4.4)$$

Теперь вычтем из первого уравнения второе и получим новое уравнение:

$$d(\theta_1 - \theta_2)/d\tau = - (1+\mu)(1-\exp(-N))/N \cdot (\theta_1 - \theta_2)$$

решение которого с учетом начальных условий (4.9) имеет следующий вид:

$$\ln(\theta_1 - \theta_2) = -\tau (1+\mu)(1-\exp(-N))/N$$

Переходя к размерному времени  $t$ , получим:

$$\ln(\theta_1 - \theta_2) = -t(1 + \mu) \frac{c_g J_g}{c_2 M_2} (1 - \exp(-N)) \quad (4.5)$$

Напомним, что  $N = 2\pi r \alpha L / c_1 J_g$

Используя полученные экспериментальные данные (последовательность измеренных в одинаковые моменты времени температур обоих термостатов), построим на фазовой плоскости безразмерных температур  $(\theta_1, \theta_2)$  прямую (4.4) и определим коэффициент  $\mu$ . Величину коэффициента  $\mu$  необходимо сравнить со значением, вычисленным по формуле (4.2). Далее, построим график в координатах  $\ln(\theta_1 - \theta_2)$  и  $t$ , где  $t$  реальное время эксперимента, и, используя зависимость (4.5), определим коэффициент теплообмена  $\alpha$ .

**Оформление результатов экспериментов.**

1. Массивы полученных экспериментальные данные  $T_i(t)$  (измеренные в одинаковые моменты времени температуры обоих термостатов,  $i = 1$  - “горячий” термостат,  $i = 2$  - “холодный” термостат) следует превратить в массивы безразмерных температур по формулам

$$\theta_i = (T_i(t) - T_2^0) / (T_1^0 - T_2^0) \quad i = 1, 2$$

Здесь

$T_1^0 = T_1(0)$  - начальная температура в 1-ом термостате (максимальная температура в системе).

$T_2^0 = T_2(0)$  - начальная температура во 2-ом термостате (минимальная температура в системе).

2. Нанести точки  $(\theta_1, \theta_2)$  на фазовую плоскость этих переменных.

3. Провести прямую линию через нанесенные точки  $(\theta_1, \theta_2)$ .

4. По параметрам этой прямой определить коэффициент  $\mu$  в формуле (4.4)

$$\theta_1 + \mu\theta_2 = 1$$

5. Сравнить полученное значение со значением из формулы (4.2). Значения теплоемкостей воды принять равными  $c_1, c_2 = 1$  кал/(г•град).

6. Нанести экспериментальные данные (4.5) в координатах

$$\ln(\theta_1 - \theta_2), t.$$

7. Через полученные точки провести прямую линию. По параметрам этой прямой определить число единиц переноса  $N$  и коэффициент теплообмена  $\alpha$ .

8. Используя материал пункта 3.3 и формулу (3.6) оценить эффективный коэффициент теплообмена  $\alpha$  и сравнить его с экспериментально определенным в пункте 4.

**Таблица физических параметров для оценки эффективного коэффициента теплообмена  $\alpha$ .**

	Тепло емкость, кал/(г•град)	$10^6$ *Кинемат. вязкость, $m^2/сек$	Теплопроводность, какл/(м час град)	Pr
Внутренняя задача	1	0.4	0.53	5.4
Внешняя задача	1	0.8	0.57	2.5

## 5. Задачи для самостоятельного решения.

1. Определить коэффициент теплообмена при нагревании заданной массы жидкости греющим потоком с фиксированной температурой на входе в змеевик:  $T_1(t) = T_1^0$






### 3.3. Оценка коэффициентов теплообмена.

Чтобы количественно оценить коэффициенты теплообмена  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  или, что тоже самое, соответствующие критерии Нуссельта, следует проанализировать гидродинамическую обстановку и свойства среды. Следует также вспомнить приведенные в разделе 2.2 соображения о двух типах задач – внутренней и внешней.

**Внутренняя задача.** Оценить характер течения жидкости внутри трубки можно, вычислив значение числа Рейнольдса (2.5). В нашем случае диаметр трубки равен 0.7 см, скорость течения жидкости определяем прямым измерением, используя секундомер и мерный цилиндр, вязкость жидкости следует взять из справочника (при этом следует иметь в виду, что критическое значение числа Рейнольдса зависит от формы змеевика). Для прямой трубки критическое число Рейнольдса равно 2200.

Имеется большое число исследований процесса теплообмена для внутренней задачи, результаты которых систематизированы в виде полуэмпирических формул. Для ламинарного режима течения жидкости в трубке при  $Pe \cdot d/L > 50$  получено точное аналитическое выражение:

$$\mathbf{Nu} = 1.615 (\mathbf{Re Pr d/L})^{1/3}$$

Для других случаев в литературе имеется много полуэмпирических формул типа (2.13). Приведем часто используемое соотношение для определения числа Нуссельта при течении в трубе в случае турбулентного режима (при  $\mathbf{Re} > 10^4$ ):

$$\mathbf{Nu} \cong 0.03 \mathbf{Re}^{0.8} \mathbf{Pr}^{0.43}$$

**Внешняя задача.** Аналогичным образом следует оценить характер течения жидкости в объеме термостата вокруг змеевика. Прежде всего, мы должны оценить характерную скорость течения жидкости и характерный масштаб области течения. В качестве характерного масштаба при вычислении числа  $\mathbf{Nu}$  следует выбрать характерный размер области, занимаемой жидкостью. В данном случае это размер термостата  $\mathbf{d}_T$ . Конструктивные особенности нагреваемого аппарата приводят нас к необходимости при вычислении числа Рейнольдса оценивать скорость течения жидкости так же, как и во внутренней задаче, а в качестве характерного размера брать величину  $\mathbf{d}_T$ .

Для случая внешней задачи в литературе также имеется много формул типа (2.13). Приведем одну из них:

$$\mathbf{Nu} \approx 0.9 \mathbf{Re}^{0.62} \mathbf{Pr}^{0.33}.$$