

Вопросы по курсу физики. III семестр (осень 2002 г.)

1. Свободные колебания систем с одной степенью свободы. Гармонический осциллятор. Частота, период, амплитуда и фаза собственных колебаний. Энергия механического и электрического гармонических осцилляторов. Представление об ангармонизме колебаний.
2. Свободные колебания системы связанных осцилляторов. Нормальные колебания (моды). Частоты нормальных мод для системы, состоящей из двух связанных осцилляторов (механических и электрических). Общий метод определения частот нормальных мод и нормальных координат.
3. Колебания молекул. Колебательные степени свободы. Типы молекулярных колебаний (валентные и деформационные, симметричные и антисимметричные). Нормальные моды некоторых простейших молекул.
4. Сложение гармонических колебаний, происходящих по одной оси. Представление о методе векторных диаграмм. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты. Фигуры Лиссажу.
5. Затухающие колебания. Осциллятор с небольшим затуханием. Частота и период колебаний, коэффициент затухания. Время релаксации амплитуды и энергии колебаний. Декремент и логарифмический декремент. Добротность. Осциллятор с большим затуханием. Критический режим.
6. Вынужденные гармонические колебания. Зависимость амплитуды и фазы установившихся колебаний, а также амплитуд поглощения и дисперсии от частоты вынуждающей силы. Резонансы смещения и скорости. Мощность, затрачиваемая на поддержание колебаний.
7. Лоренцевская форма линии поглощения. Ширина резонансной кривой поглощения. Пять определений добротности. Особенности вынужденных колебаний в системе связанных осцилляторов.
8. Квазистационарный переменный ток. Закон Ома для цепи, состоящей из последовательно соединённых индуктивности, сопротивления и конденсатора. Резонансные явления в последовательных и параллельных цепях переменного тока. Мощность, выделяющаяся в цепи переменного тока. Эффективные (действующие) значения напряжения и тока.
9. Классическое дифференциальное волновое уравнение. Уравнение плоской и сферической гармонических волн. Продольные и поперечные волны. Волновой вектор. Учёт затухания волны. Упругие гармонические волны. Плотность энергии, переносимой упругой волной.
10. Электромагнитные волны в однородной непроводящей среде. Связь между амплитудами и фазами колебаний векторов напряжённости электрического и индукции магнитного поля в электромагнитной волне. Энергетические характеристики электромагнитных и упругих волн (плотность потока энергии, интенсивность, векторы Умова и Пойнтинга).
11. Наложение волн. Когерентные волны. Интерференция волн от двух точечных источников, опыт Юнга. Роль некогерентности источников и их конечных размеров. Время и длина когерентности, число когерентных колебаний, радиус и угол когерентности, объём когерентности.
12. Интерференция волн, отражённых от одной поверхности (стоячие волны). Фаза отражённой волны – упругой и электромагнитной. Интерференция волн, отражённых от двух поверхностей. Полосы равной ширины и равного наклона. Пространственная локализация интерференционной картины. Формула Вульфа-Брэгга.
13. Интерференционные компараторы. Рефрактометры и спектральные приборы. Рефрактометр Жамена. Спектральный аппарат Фабри-Перо. Принципы Фурье-спектроскопии. Представление о голографии.
14. Дифракция волн. Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля. Дифракция волн на круглом отверстии и круглой преграде. Амплитудная и фазовая зонные пластинки. Ди-

фракция Фраунгофера на щели. Условия максимумов и минимумов дифракционной картины.

15. Классификация волновых явлений (дифракция Френеля или Фраунгофера, геометрическая оптика). Роль дифракции в формировании оптических изображений. Условия разрешения близких объектов оптическими приборами.
16. Дифракционная решётка. Главные и дополнительные максимумы и минимумы дифракционной картины. Характеристики дифракционной решётки как спектрального аппарата: свободная спектральная область, угловая и линейная дисперсии, разрешающая способность. Критерий Рэлея разрешения двух близких спектральных линий.
17. Поляризация волн. Прохождение естественного и плоско поляризованного света через идеальный и неидеальный поляризатор. Закон Малюса. Степень поляризации волн. Поляризация волн при избирательном поглощении. Закон Бугера-Ламберта-Бера.
18. Закономерности излучения диполя. Поляризация света при отражении от поверхности диэлектрика. Угол Брюстера. Поляризация рассеянного света. Рассеяние мутными средами и молекулярное рассеяние. Закон Рэлея. Представление о рассеянии Ми.
19. Прохождение светового луча через анизотропное одноосное вещество. Главная оптическая ось. Обыкновенный и необыкновенный лучи. Волновые поверхности для обыкновенных и необыкновенных волн в анизотропном веществе. Получение и анализ эллиптически и циркулярно поляризованного света. Левая и правая поляризации. Кристаллические пластинки $\lambda/2$ и $\lambda/4$.
20. Интерференция поляризованных лучей. Условия наблюдения интерференции. Цвета кристаллических пластинок. Коноскопия. Искусственная оптическая анизотропия: фотоупругость, электро- и магнитооптические эффекты (Поккельса, Керра, Коттона-Мутона).
21. Оптическая активность кристаллов и молекул. Оптические антиподы и изомеры. Положительные и отрицательные оптически активные вещества. Закон Био. Гипотеза Френеля. Искусственная оптическая активность (эффект Фарадея).

**Ответы на экзаменационные
вопросы по физике,
январь 2003.**

**(составлены А. А. Цирлиным
при участии А. С. Митяева и Е. Д. Смурного)**

1. Свободные колебания систем с одной степенью свободы. Гармонический осциллятор. Частота, период, амплитуда и фаза собственных колебаний. Энергия механического и электрического гармонических осцилляторов. Представление об ангармонизме колебаний.

1) *Свободные колебания систем с одной степенью свободы:*

Колебательный процесс – процесс, характеризующийся определённой повторяемостью во времени.

Свободные колебания – колебания системы, происходящие без воздействия переменных внешней сил.

Колебательные процессы возникают в случае, если система находится в потенциальной яме. Тогда при отклонении от положения равновесия, потенциальная энергия системы будет изменяться вблизи точки минимума. Пусть U – потенциальная энергия – зависит только от одной из координат (одна степень свободы); $U \in C^\infty(O(x_0))$, где x_0 – точка минимума. Тогда

$U(x)$ может быть разложена в ряд Тейлора в $O(U_0)$: $U = U_0 + \frac{dU}{dx}(x_0)\xi + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2}(x_0)\xi^2 + \dots$, где

$\xi = x - x_0$ – отклонение от положения равновесия. $\frac{dU}{dx}(x_0) = 0$, поскольку x_0 – точка минимума, то есть разложение примет вид: $U = U_0 + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2}(x_0)\xi^2 + \dots$

2) *Модель гармонического осциллятора:*

Пренебрежём в разложении п. 1 производными порядка выше, чем 2. Тогда $U = U_0 + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2}(x_0)\xi^2 = U_0 + \frac{k\xi^2}{2} \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx} = -k\xi$, то есть F – возвращающая сила – пропорциональна отклонению от положения равновесия, как и сила упругости пружины, поэтому F называют квазиупругой.

Условия применимости модели: малое отклонение от положения равновесия, отсутствие диссипации энергии.

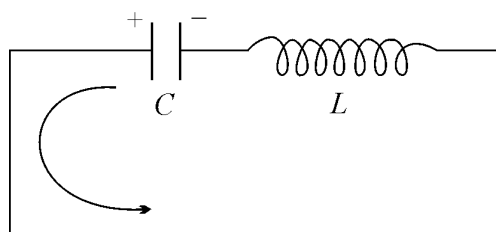
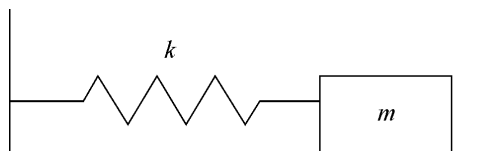
3) *Параметры гармонических колебаний:*

Уравнение $F = -k\xi$ является линейным дифференциальным уравнением второго порядка $m\ddot{\xi} + k\xi = 0$. Тогда $\xi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – круговая (циклическая) частота собственных колебаний системы. $\xi(0) = A \cos \varphi_0$, то есть φ_0 – начальная фаза колебаний; $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебаний. По аналогии с вращательным движением $\nu = 2\pi\omega_0$ – частота колебаний;

$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ – период колебаний. $A = \xi_{\max}$ – амплитуда колебаний. Частота колебаний гармонического осциллятора не зависит от амплитуды (колебания изохронны).

Рассмотрим механическую и электрическую модели гармонического осциллятора. Для механического осциллятора $m\ddot{\xi} = -k\xi$, где k – коэффициент упругости пружины. Тогда $\xi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$; $W = U + T =$

$= \frac{k\xi^2}{2} + \frac{m\dot{\xi}^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$. Для электрического контура:



$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$, где q – заряд на конденсаторе, L – индуктивность катушки, C – ёмкость конденсатора. Тогда $q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}$. Таким образом, существует аналогия между механическими и электрическими колебаниями: L – аналог m , $1/C$ – аналог k .

Фазовое пространство – пространство, натянутое на вектора $\dot{\xi}$, ξ . В случае гармонического осциллятора кривая, представляющая колебания в этом пространстве, имеет вид эллипса $\left(\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\dot{\xi}^2}{A^2\omega_0^2} = 1 \right)$.

4) Примеры использования модели гармонического осциллятора:

Рассмотрим два тела разной массы, соединённые пружиной с жёсткостью k (эта система связанных осцилляторов моделирует валентные колебания



атомов в двухатомной молекуле). $m_1 \ddot{\xi}_1 = -k(\xi_1 - \xi_2)$; $m_1 \ddot{\xi}_1 = -m_2 \ddot{\xi}_2$ (центр масс молекулы должен оставаться неподвижным, поскольку внешние силы отсутствуют). Тогда

$\mu \ddot{\xi}_1 = -k\xi_1$, где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведённая масса. Частота собственных колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$,

то есть наблюдается полная аналогия с моделью механического осциллятора (п. 3). Если масса одного из тел стремится к нулю, то $\mu \rightarrow m_1$; $\omega_0 \rightarrow \sqrt{\frac{k}{m_1}}$.

5) Ангармонизм колебаний:

В модели гармонического осциллятора $F = -k\xi$, то есть F линейна; однако если брать из разложения функции U в ряд Тейлора (п. 1) члены более высокого порядка, то $F = -k\xi - k_1\xi^2 + \dots = f(\xi) \Rightarrow m\ddot{\xi} = f(\xi)$. В этом случае колебания нелинейны (решением является периодическая, но негармоническая функция, которая, однако, может быть приближена суммой гармонических разложением в ряд Фурье); они неизохромны (частота зависит от амплитуды, поскольку система имеет несколько собственных частот), моды колебаний перестают быть независимыми (см. 2.1).

2. Свободные колебания системы связанных осцилляторов. Нормальные колебания (моды). Частоты нормальных мод для системы, состоящей из двух осцилляторов (механических и электрических). Общий метод определения нормальных мод и нормальных координат.

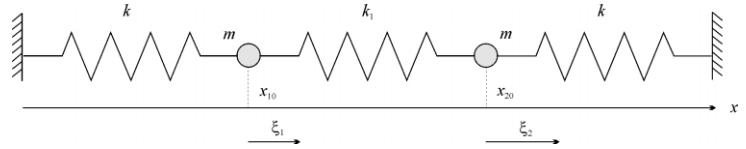
1) Нормальные моды и нормальные координаты:

Нормальные координаты – координаты, введение которых позволяет свести уравнения движения системы связанных тел к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, каждое из которых содержит только одну переменную – одну из нормальных координат. Число нормальных координат равно числу степеней свободы системы (то есть числу уравнений, которыми описывается система).

Нормальные моды – колебания, описываемые уравнениями на нормальные координаты; могут быть возбуждены независимо друг от друга; не обмениваются энергией.

2) Механические осцилляторы:

Рассмотрим два груза одинаковой массы, связанные пружиной жёсткости k_1 ; грузы связаны с неподвижными опорами пружинами жёсткости

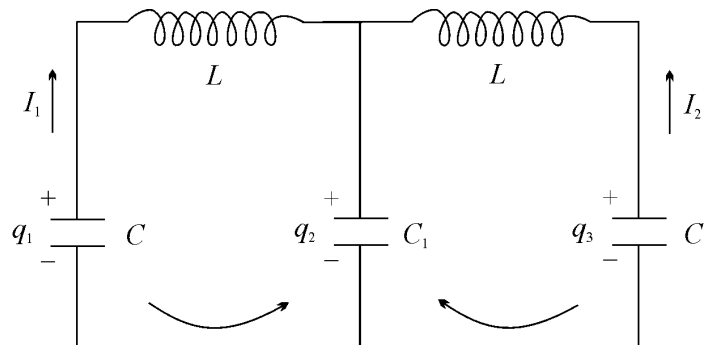


Тогда
$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_1 = -k\xi_1 - k_1(\xi_1 - \xi_2) \\ m\ddot{\xi}_2 = -k\xi_2 + k_1(\xi_1 - \xi_2) \end{cases}; \text{ сложим и вычтем уравнения: } \begin{cases} m\ddot{\xi}_I = -k\xi_I \\ m\ddot{\xi}_{II} - (k + 2k_1)\xi_{II} \end{cases}, \text{ где } \xi_I = \xi_1 + \xi_2; \xi_{II} = \xi_1 - \xi_2 - \text{ нормальные координаты. Решением системы является набор гармонических функций } \xi_I \text{ и } \xi_{II}: \begin{cases} \xi_I = A_I \cos(\omega_I t + \varphi_I) \\ \xi_{II} = A_{II} \cos(\omega_{II} t + \varphi_{II}) \end{cases}, \text{ где } \omega_I = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_{II} = \sqrt{\frac{k + 2k_1}{m}} - \text{ частоты нормальных мод (собственные частоты системы). } \xi_1 = \frac{\xi_I + \xi_{II}}{2}; \xi_2 = \frac{\xi_I - \xi_{II}}{2}. \text{ Таким образом, для нахождения всех параметров колебаний системы необходимо четыре начальных условия, которые позволят определить } A_I, A_{II}, \varphi_I, \varphi_{II}.$$

Если в начальный момент времени сообщить грузам одинаковые по модулю и направлению смещения, то $\xi_{II} = 0$. Тогда будет возбуждена только низкочастотная мода колебаний: грузы колеблются как единое тело. Если сообщить грузам одинаковые по модулю, но различные по направлению смещения, то $\xi_I = 0$; возбуждается высокочастотная мода колебаний. При этом в обоих случаях характер колебаний не изменяется со временем, то есть вторая мода не возбуждается – не происходит обмена энергией между модами. Поэтому нормальные моды являются независимыми. Если связь между грузами – слабая ($k_1 \ll k$), то частоты нормальных мод близки; наложение двух колебаний с близкими частотами приводит к медленному изменению амплитуды колебаний каждого из грузов – будут наблюдаться «биения».

3) Электрические осцилляторы:

Рассмотрим контур, представленный на рисунке. Из правил Кирхгофа:



$$\begin{cases} -\frac{q_1}{C} - L \frac{dI_1}{dt} + \frac{q_2}{C_1} = 0 \\ -\frac{q_3}{C} - L \frac{dI_2}{dt} + \frac{q_2}{C_1} = 0 \end{cases}; I_1 = \dot{q}_1, I_2 = \dot{q}_2;$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0,$$

тогда
$$\begin{cases} L\ddot{q}_1 + \frac{q_1}{C} + \frac{q_1 + q_3}{C_1} = 0 \\ L\ddot{q}_3 + \frac{q_1 + q_3}{C_1} + \frac{q_3}{C} = 0 \end{cases}.$$

Сложим и вычтем уравнения:
$$\begin{cases} L\ddot{q}_I + \frac{q_I}{C} = 0 \\ L\ddot{q}_{II} + q_{II} \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_1} \right) = 0 \end{cases}, \text{ где } q_I = q_1 - q_3; q_{II} = q_1 + q_3 - \text{ нормальные координаты. } \omega_I = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \omega_{II} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_1} \right)}{L}} - \text{ нормальные частоты. Здесь вновь (как и в 1.3) наблюдается аналогия между механическими и электрическими колебаниями.}$$

4) *Общий метод определения нормальных координат:*

В случае возбуждения одной из нормальных мод тела колеблются в одной фазе или в противофазе, поэтому в общем случае для поиска нормальных координат решения ξ_1 и ξ_2 ищут в виде $A_I \cos \omega_1 t$ и $B_{II} \cos \omega_1 t$. При подстановке их в уравнения движения получим систему двух линейных уравнений на ω_1 и $C_I = A_I/B_I$. Аналогично можно искать решения в виде $A_{II} \cos \omega_2 t$, $-B_{II} \cos \omega_2 t$. Таким образом, получим уравнения колебаний тел в случае возбуждения мод по отдельности. Если $\xi_I = \xi_1 + n_1 \xi_2$, а $\xi_{II} = \xi_1 + n_2 \xi_2$, то $\xi_1 = \frac{n_2 \xi_I - n_1 \xi_{II}}{n_2 - n_1}$; $\xi_2 = \frac{\xi_I - \xi_{II}}{n_1 - n_2}$, то есть $C_I = -n_2$, $C_{II} = -n_1$. ω_1 , ω_2 – нормальные частоты.

3. Колебания молекул. Колебательные степени свободы. Типы молекулярных колебаний (валентные и деформационные, симметричные и антисимметричные). Нормальные моды некоторых простейших молекул.

1) *Типы молекулярных колебаний:*

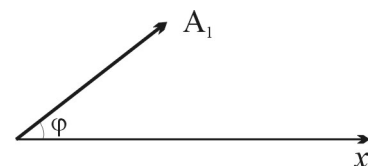
Валентные молекулярные колебания – колебания атомов, происходящие вдоль направлений химических связей; могут быть симметричными (атомы колеблются синфазно – возбуждена низкочастотная мода) и антисимметричными (атомы колеблются в противофазе – возбуждена высокочастотная мода). Валентные колебания описываются моделями связанных осцилляторов (см. № 2).

Деформационные колебания – изменение формы молекулы без изменения длин связей.

2) *Колебательные степени свободы:*

Если молекула состоит из N атомов, то для её описания требуется $3N$ уравнений (каждый атом представляется как материальная точка, имеющая три поступательные степени свободы). Молекула в целом имеет три поступательные и три (две для линейной) вращательные степени свободы. Тогда колебания атомов в молекуле описываются $3N - 6$ ($3N - 5$) уравнениями, то есть молекула имеет $3N - 6$ ($3N - 5$) колебательных степеней свободы.

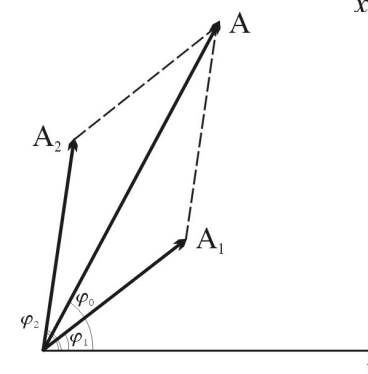
Например, молекула воды нелинейна и состоит из трёх атомов, поэтому она имеет 3 колебательные степени свободы. Две из них соответствуют симметричным и антисимметричным валентным колебаниям (вдоль О–Н связей), а третья – деформационным колебаниям (изменению угла Н–О–Н). Молекула CO_2 линейна и состоит из трёх атомов, поэтому она имеет 4 колебательные степени свободы. Две из них вновь соответствуют валентным (симметричным и антисимметричным) колебаниям, а две другие – так называемым вырожденным (искривление молекулы в двух взаимно перпендикулярных плоскостях). Такие вырожденные колебания являются деформационными, но имеют иное название, поскольку плоскости равноправны и соответствующие им колебания имеют одинаковую энергию.



4. Сложение гармонических колебаний, происходящих по одной оси. Представление о методе векторных диаграмм. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты. Фигуры Лиссажу.

1) *Сложение колебаний, происходящих вдоль одной оси:*

Для сложения таких колебаний используют метод векторных диаграмм: колебание представляется в виде вектора, модуль которого равен амплитуде, вращающегося вокруг положения



равновесия. В этом случае угол φ – фаза колебаний. Координата тела $x = A \cos \varphi$ изменяется по гармоническому закону и, по сути, совершает колебания. Именно она имеет физический смысл. В этом случае колебания можно складывать как вектора амплитуд.

Если колебания когерентны (то есть их разность фаз постоянна во времени), то для результирующего колебания

$$\xi = A \cos(\omega t + \varphi_0) \text{ верны следующие зависимости: } A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1);$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \text{ Если колебания некогерентны, то результирующая амплитуда}$$

изменяется во времени, поэтому требуется производить отдельный расчёт для каждого момента времени.

2) Сложение взаимно перпендикулярных колебаний:

В этом случае удобно принять прямые, вдоль которых происходят колебания, за оси координат. Тогда результирующее колебание – сложение колебаний двух координат тела.

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}), y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}) \Rightarrow \sin(\omega t + \varphi_{01}) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}, \sin(\omega t + \varphi_{02}) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{A_2^2}};$$

$$\cos(\omega t + \varphi_{01}) \cos(\omega t + \varphi_{02}) + \sin(\omega t + \varphi_{01}) \sin(\omega t + \varphi_{02}) = \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \frac{xy}{A_1 A_2} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sqrt{1 - \frac{y^2}{A_2^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta \varphi = 1 - \cos^2 \Delta \varphi - \text{уравнение эллипса. Происходит эллиптическая поляри-$$

зация колебаний – траектория тела имеет вид эллипса. При $A_1 = A_2$ и $\Delta \varphi = (2m+1)\pi/2$ эллипс вырождается в окружность (циркулярная поляризация), а при $\Delta \varphi = \pi n$ – в прямую.

Если частоты складываемых колебаний различаются в целое число раз, то траектории тела называются фигурами Лиссажу: они вписаны в прямоугольник со сторонами $2A_1, 2A_2$; эти кривые замкнуты, а их форма зависит от соотношения частот и разности фаз складываемых колебаний.

5. Затухающие колебания. Осциллятор с небольшим затуханием. Частоты и период колебаний, коэффициент затухания, время релаксации амплитуды и энергии, декремент и логарифмический декремент, добротность. Осциллятор с большим затуханием. Критический режим.

1) Осциллятор с небольшим затуханием:

Затухающие колебания – колебания, при которых имеют место потери энергии.

Пусть на колебательную систему действует сила трения, пропорциональная скорости (случай вязкого трения): $F_{mp} = -r \dot{\xi}$. Тогда второй закон Ньютона может быть записан в виде

$$m \ddot{\xi} = -k\xi - r \dot{\xi} \Rightarrow \ddot{\xi} + 2\beta \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \text{ где } 2\beta = r/m, \omega_0^2 = k/m; \text{ характеристическое уравнение}$$

имеет вид $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$. В случае малого затухания $\beta < \omega_0$, поэтому решение дифференциального уравнения примет вид $\xi = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_s t + \varphi_0)$, где $\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Здесь ω_s – соб-

ственная частота затухающих колебаний; ω_0 – собственная частота незатухающих колебаний;

φ_0 – начальная фаза. $A = A_0 e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний. $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$ – период зату-

хающих колебаний.

Для электрического колебательного контура затухание обусловлено наличием сопро-

тивления, на котором выделяется тепло (теряется энергия). Уравнение запишется в виде $-L\dot{I} = IR + \frac{q}{C} \Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{CL}q = 0$, то есть в этом случае $2\beta = \frac{R}{L}$.

2) Параметры затухания колебаний:

β – коэффициент затухания.

Время релаксации амплитуды (τ_A) – время, за которое амплитуда уменьшается в e раз:

$$\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau_A)}} = e \Rightarrow e^{\beta\tau_A} = e \Rightarrow \tau_A = \frac{1}{\beta}.$$

Время релаксации энергии (τ_W) – время, за которое энергия системы уменьшается в e

раз: $W = \frac{m\dot{\xi}_{\max}^2}{2} \sim A_0^2 e^{-2\beta t} \omega_s^2 \sim e^{-2\beta t} \Rightarrow \tau_W = \frac{1}{2\beta}$.

Число колебаний, за которое амплитуда уменьшается в e раз (N_e): $N_e = \frac{\tau_A}{T} = \frac{\omega_s}{2\pi\beta} = \frac{1}{\beta T}$.

Декремент затухания (D) – число раз, в которое уменьшается амплитуда колебаний за

период: $D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$.

Логарифмический декремент затухания (γ): $\gamma = \ln D = \beta T = \frac{1}{N_e}$.

Добротность (Q) – параметр, характеризующий устойчивость колебательной системы к затуханию; пропорционален (см. 7.2) отношению энергии к убыли энергии за период.

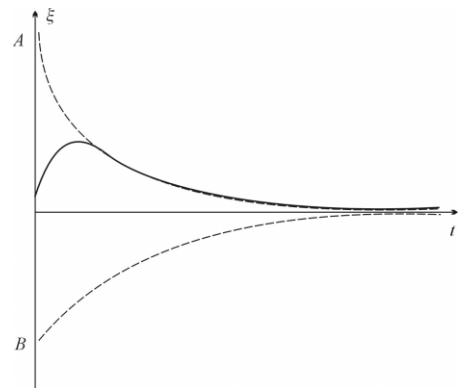
$$Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega_s}{2\beta}; \text{ при малом затухании } Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

3) Осциллятор с большим затуханием:

При $\beta > \omega_0$ решение дифференциального уравнения, соответствующего второму закону Ньютона (см. 5.1) имеет иной вид: $\xi = e^{-\beta t} (Ae^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t}) = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}$,

где $\tau_1 = \frac{1}{\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}$, $\tau_2 = \frac{1}{\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}$. Параметры A и B

определяются из начальных условий. Время возвращения системы в положение равновесия определяется экспонентой с меньшим показателем, то есть τ_1 . При большом затухании τ_1 может быть достаточно большим, то есть время релаксации окажется большим, что нежелательно при работе стрелочных приборов.



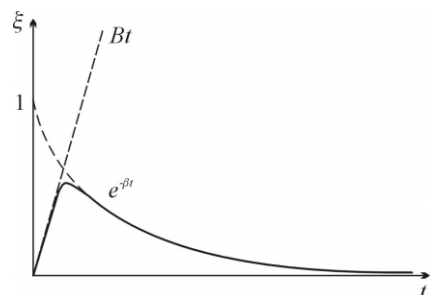
4) Критический режим:

При $\beta = \omega_0$ реализуется так называемый «критический» режим колебаний осциллятора; в этом случае решение дифференциального уравнения имеет вид

$\xi = e^{-\beta t} (A + Bt)$. $A = \xi(0)$; при $A = 0$ $B = \dot{\xi}(0)$; тогда максимальное отклонение достигается в момент времени $1/\beta$ и

составляет $\xi_{\max} = \frac{B}{\beta e} \sim \dot{\xi}(0)$. Это свойство используется для

определения импульса по максимальному отклонению стрелки в баллистических приборах.



5) Особенности затухающих колебаний в системе связанных осцилляторов:

Разные моды затухают по-разному. При малых затуханиях нормальные моды остаются независимыми, поэтому их число равно числу степеней свободы, как и для систем без затухания (см. № 2). При больших затуханиях моды перестают быть независимыми.

6. Вынужденные гармонические колебания. Зависимости амплитуды и фазы установившихся колебаний, а также амплитуд поглощения и дисперсии от частоты вынуждающей силы. Резонансы смещения и скорости. Мощность, затрачиваемая на поддержание колебаний.

1) Установившиеся вынужденные колебания:

Вынужденные колебания – колебания, происходящие под действием переменной внешней силы. Будем рассматривать только случай внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону: $F = F_0 \cos \omega t$.

Под действием внешней силы система будет выведена из положения равновесия, поэтому в ней возбуждятся собственные (свободные) колебания с частотой ω_0 ; кроме этого, система будет колебаться с частотой ω внешней силы. Постепенно свободные колебания затухнут; частота колебаний станет равна ω – такой режим колебаний называется установившимся. Второй закон

Ньютона запишется в виде $m \ddot{\xi} = -k\xi - r \dot{\xi} + F_0 \cos \omega t \Rightarrow \ddot{\xi} + 2\beta \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = f_0 \cos \omega t$, где $f_0 = F_0/m$. Решение данного дифференциального уравнения будет состоять из решения однородного уравнения, соответствующего свободным затухающим колебаниям, и частого решения, которое может быть найдено в виде $\xi = A \cos(\omega t - \alpha)$. Тогда

$$\dot{\xi} = A\omega \cos\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad \ddot{\xi} = -A\omega^2 \cos(\omega t - \alpha + \pi).$$

Воспользуемся методом векторных диаграмм: по теореме Пифагора

$$A^2 \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right) = f_0^2 \Rightarrow A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}},$$

$$\alpha = \text{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

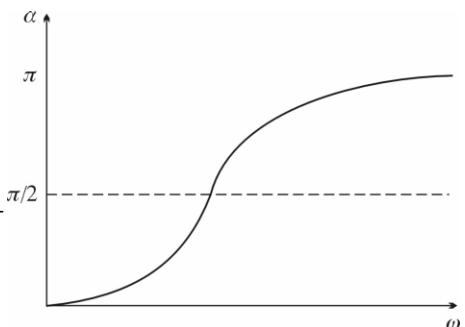
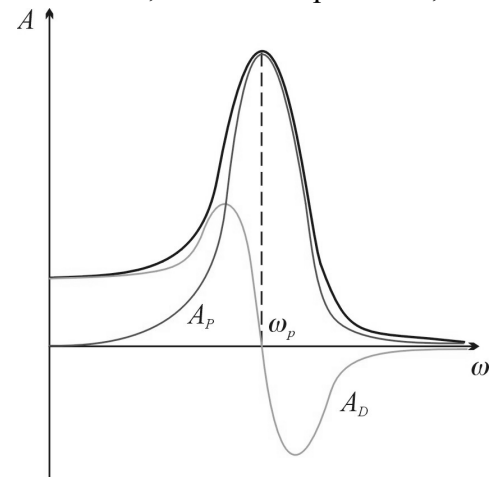
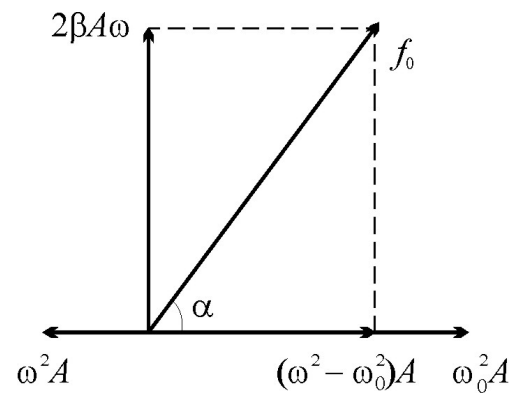
Составляющие амплитуды $A_P = A \sin \alpha$ и $A_D = A \cos \alpha$ называются амплитудами поглощения и дисперсии соответственно.

При $\omega \ll \omega_0$ $A \approx \frac{f_0}{\omega_0^2}$, $\alpha \approx \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2}$; система

ведёт себя как свободный осциллятор, на который действует постоянная по величине сила F_0 . При

$\omega \gg \omega_0$ $A \approx \frac{f_0}{\omega^2} \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \infty$; $\text{tg} \alpha \approx -\frac{2\beta}{\omega}$; $\alpha \rightarrow \pi$; $A_P \approx \frac{2\beta f_0}{\omega^3}$

$$A_D \approx -\frac{f_0}{\omega^2} \approx -A.$$



2) Резонансы амплитуды и скорости:

Амплитуда вынужденных колебаний максимальна если значение $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$ минимально: $-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2\omega = 0 \Rightarrow \omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega_s^2 - \beta^2}$ – резонансная частота.

При резонансе $A_p \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_s}$, $\text{tg } \alpha_p = \frac{\omega_p}{\beta}$; при малом затухании $A_p \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}$,

$$\text{tg } \alpha_p \approx \frac{\omega_0}{\beta} \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha_p \approx \frac{\pi}{2}.$$

Амплитуда скорости определяется выражением: $A_v = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 / \omega^2 + 4\beta^2}}$; максимум

достигается при $\omega = \omega_0$. $A_v^p = \frac{f_0}{2\beta}$.

3) *Мощность, затрачиваемая на поддержание колебаний:*

Мгновенная мощность может быть вычислена как $P(t) = F(t) \cdot \dot{\xi}(t)$, то есть $P(t) = F_0 \cos \omega t \cdot A\omega \cos\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} F_0 A \omega \left(\cos\left(2\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right)$. Поэтому среднее

значение мощности, затрачиваемой на поддержание колебаний, $\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt =$

$$\frac{1}{2} F_0 A \omega \sin \alpha = \frac{1}{2} F_0 A_p \omega \text{ пропорционально амплитуде поглощения.}$$

7. Лоренцевская форма линии поглощения. Ширина резонансной кривой поглощения. Пять определений добротности. Особенности вынужденных колебаний в системе связанных осцилляторов.

1) *Ширина резонансной кривой поглощения:*

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} F_0 A_p \omega \sim \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}, \quad (\omega_0^2 - \omega^2)^2 = (\omega_0 - \omega)^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} + 1 \right)^2 \omega^2 \approx 4\omega^2 (\omega_0 - \omega)^2$$

вблизи резонанса; поэтому $\langle P(t) \rangle \sim R(\omega) = \frac{\beta^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}$. Функция $R(\omega)$ называется лоренцевской формой линии и описывает резонансный пик; $R(\omega) = 1$ при $\omega = \omega_0$; $R(\omega) = 1/2$ при $|\omega - \omega_0| = \beta$. Поэтому полуширина резонансной кривой (то есть ширина пика при значении мощности, равном половине максимального) $\Delta\omega_p \approx 2\beta = 1/\tau_w$, где τ_w – время релаксации энергии (см. № 5).

2) *Пять определений добротности:*

Первое определение добротности – см. № 5. $\tau_w = \frac{1}{2\beta} \Rightarrow Q = \omega_s \tau_w \approx \omega_0 \tau_w$ – второе определение.

деление. $S = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\gamma}}$; при малом затухании $e^{-2\gamma} \approx 1 - 2\gamma$, то есть

$S \approx \frac{\pi}{\gamma} = \frac{\omega_s}{2\beta} = Q$ – третье определение. $\frac{A_p}{A(\omega \rightarrow 0)} = \frac{\omega_0^2}{2\beta\omega_s} \approx \omega_s \tau_w = Q$ – четвёртое определение (при малом затухании). $\Delta\omega_p \approx \frac{1}{\tau_w}$, поэтому $Q = \omega_s \tau_w \approx \frac{\omega_s}{\Delta\omega_p}$ – пятое определение. Формула для $\Delta\omega_p$, а, значит, и последнее определение верны в случае $|\omega - \omega_0| \leq n\beta$, где $n \ll \frac{\omega_0}{\beta} \approx \frac{2\pi}{\gamma} = 2Q$.

3) Особенности вынужденных колебаний систем связанных осцилляторов:

Каждая нормальная мода имеет собственный резонанс, причём в общем случае ширина резонансных кривых и резонансная амплитуда различны и зависят от добротности для каждой из мод. При больших затуханиях моды перестают быть независимыми и их введение теряет смысл (как и для собственных затухающих колебаний) – см. № 5.

8. Квазистационарный переменный ток. Закон Ома для цепи, состоящей из последовательно соединённых индуктивности, сопротивления и конденсатора. Резонансные явления в последовательных и параллельных цепях переменного тока. Мощность, выделяющаяся в цепи переменного тока. Эффективные (действующие) значения напряжения и тока.

1) Закон Ома для последовательной цепи переменного тока:

Часто в цепях переменного тока напряжение изменяется по гармоническому закону $U = U_0 \cos \omega t$. В этом случае (если ток – квазистационарен, то есть в любой момент времени сила тока во всех точках последовательной цепи одинакова) второе правило Кирхгофа для цепи последовательно соединённых индуктивности, ёмкости и сопротивления запишется как $-L\ddot{q} + U_0 \cos \omega t = \frac{q}{C} + R\dot{q} \Leftrightarrow \ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = u_0 \cos \omega t$, что идентично дифференциальному уравнению второго закона Ньютона для вынужденных механических колебаний (см. № 6). Следовательно, в установившемся режиме уравнение колебаний имеет вид $q = q_0 \cos(\omega t - \alpha)$, а q_0 и α ищутся с помощью метода векторных диаграмм.

Для отыскания соотношения между амплитудными значениями силы тока и напряжения на векторной диаграмме откладывают напряжения на отдельных элементах цепи:

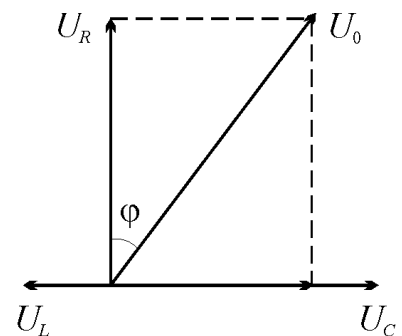
$$U_R = IR = I_0 R \cos\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right); \quad U_L = LI\dot{=} = LI_0 \omega \cos(\omega t - \alpha + \pi);$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \alpha), \quad \text{поэтому} \quad U_0^2 = I_0^2 \left(\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2 \right);$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}; \quad Z = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2} - \text{полное сопротивление}$$

последовательной цепи; $U_0 = I_0 Z$ – закон Ома для цепей переменного тока. По аналогии с цепями постоянного тока вводят сопротивления индуктивное $\chi_L = L\omega$ и ёмкостное

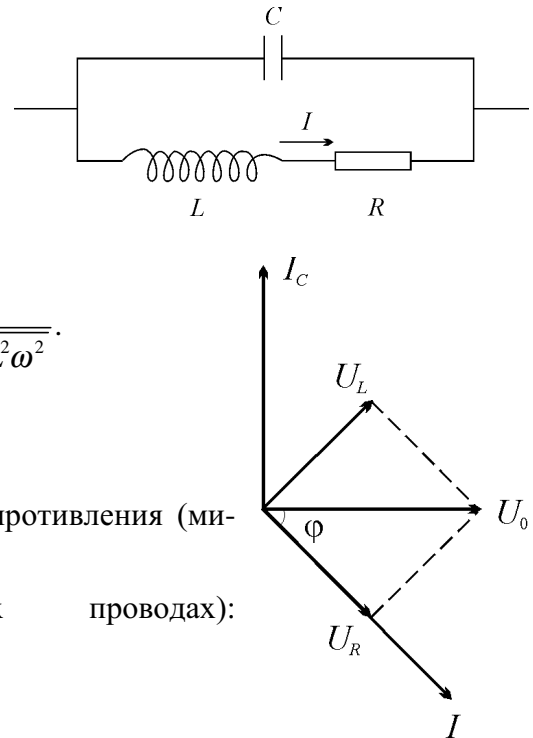
$\chi_C = \frac{1}{\omega C}$. Сопротивление резистора R называется омическим (активным); индуктивное и ёмкостное – реактивным.



2) Резонансные явления в цепях переменного тока:

Условие резонанса тока в последовательной цепи совпадает с условием резонанса скорости (см. 6.2): $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}$. Резонансу силы тока соответствует минимум полного сопротивления цепи, то есть $\chi_C = \chi_L \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$.

Для параллельной цепи, содержащей индуктивность и ёмкость, минимум (ноль) силы тока также достигается при равенстве соответствующих сопротивлений, то есть $\omega_p = \omega_0$. Такое состояние называется резонансом сопротивления (или балансом токов). Если же последовательно с индуктивностью присоединён резистор, то векторная диаграмма изменится.



$$I = \frac{U_0}{Z_1} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}; \quad \text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

$$I_0^2 = U_0^2 C^2 \omega^2 + \frac{U_0^2}{R^2 + L^2\omega^2} - 2 \frac{U_0^2 C \omega}{R^2 + L^2\omega^2} \omega L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + (1 - \omega^2 CL)^2}}. \quad \text{Условие резонанса сопротивления (минимума силы тока в подводящих проводах):}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 4\beta^2}.$$

3) Мощность, выделяющаяся в цепи переменного тока:

Аналогично 6.3 $\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} U_0 q_0 \omega \cos \varphi = \frac{I_0 U_0}{2} \cos \varphi$. Из векторной диаграммы $U_R = U_0 \cos \varphi = I_0 R$, поэтому $\langle P(t) \rangle = \frac{I_0^2 R}{2} = I_0^2 R$, где $I_0 = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ – действующее (эффективное) значение силы тока (то есть значение силы постоянного тока, для которого в цепи выделяется та же мощность). Аналогично вводится действующее значение напряжения $U_0 = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$. Выражения для действующих значений силы тока и напряжения, очевидно, не зависят от формы цепи и определяются характером колебаний напряжения.

9. Классическое дифференциальное волновое уравнение. Уравнение плоской и сферической гармонических волн. Продольные и поперечные волны. Волновой вектор. Учёт затухания волны. Упругие гармонические волны. Плотность энергии, переносимой упругой волной.

1) Классическое дифференциальное волновое уравнение:

Волна – распространяющееся в среде возмущение.

Простейшей моделью волны является система большого числа связанных осцилляторов. Пусть массы всех осцилляторов одинаковы и равны m , все они связаны одинаковыми пружинами жёсткости k , а расстояние между соседними осцилляторами в положении равновесия равно l . Тогда для любого осциллятора можно записать второй закон Ньютона: $m \ddot{\xi}_n = k(\xi_{n+1} - \xi_n) - k(\xi_n - \xi_{n-1})$. Переходя к непрерывной среде, устремим число осцилляторов

к бесконечности, а l – к нулю и получим гладкую функцию $\xi(x, t)$. Пусть x – координата n -го осциллятора; тогда, разложив ξ в ряд Тейлора, а также считая, что в процессе колебаний расстояние между соседними осцилляторами изменяется мало, получим: $\xi_{n+1} \approx \xi(x+l, t) \approx \xi(x, t) + l \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, t)$; $\xi_{n-1} \approx \xi(x-l, t) \approx \xi(x, t) - l \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, t)$. Подставим данные выражения в дифференциальное уравнение второго закона Ньютона: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{kl^2}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$, то есть $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ – классическое дифференциальное волновое уравнение для одномерного случая, где v – коэффициент, имеющий размерность скорости. Пусть V – скорость распространения волны (то есть скорость распространения возмущений); тогда, считая колебания в начале координат гармоническими без начальной фазы: $\xi(0, t) = A \cos \omega t$, получим, что $\xi(x, t) = A \cos(\omega(t - \tau)) = A \cos(\omega t - kx)$, где τ – время распространения волны в точку с координатой x ; k – волновое число: $\tau = \frac{x}{V}$, $k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{TV} = \frac{2\pi}{\lambda}$; λ – длина волны; расстояние, на которое распространяется волна за один период колебаний. Подставив функцию ξ в волновое уравнение, можно убедиться, что она удовлетворяет этому уравнению, причём константа $v = V$. Таким образом, константа в волновом уравнении имеет смысл скорости распространения волны, называемой фазовой скоростью.

Условия применимости классического волнового уравнения: малые возмущения среды, среда является недиспергирующей (то есть скорости распространения волн разных частот одинаковы). Второе требование связано с тем, что уравнению, очевидно, должны удовлетворять гармонические функции разных частот, а это, в свою очередь, позволяет распространить уравнение на любые периодические функции, удовлетворяющие условию Дини и представимые в виде суммы своего ряда Фурье.

Для трёхмерного случая волновое уравнение запишется как $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = V^2 \cdot \Delta \xi$, где $\Delta = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

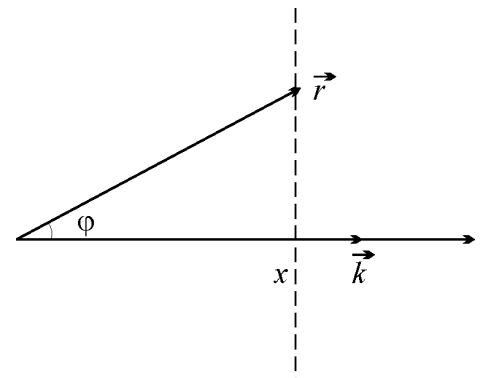
2) Уравнения плоской и сферической волн:

Волновая поверхность – геометрическое место точек, колеблющихся в одной фазе.

Фронт волны – передняя волновая поверхность.

Волны можно классифицировать по виду их волновых поверхностей: плоские, сферические, цилиндрические и др.

Волну можно рассматривать, как плоскую, если размеры источника много больше расстояния до него; $\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ – уравнение плоской волны (энергия колеблющихся частиц не зависит от расстояния до источника, поскольку в каждой плоскости все частицы колеблются синфазно). Возможно рассмотрение плоской волны в полярной системе координат: \vec{k} – волновой вектор (вектор, перпендикулярный к фронту волны и направленный в сторону её распространения); $kx = kr \cos \varphi = \vec{k} \vec{r}$, поэтому уравнение можно записать как $\xi(x, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r})$.



В сферической волне (всякую волну можно считать сферической, если расстояние до источника много больше его размеров) энергия колеблющейся частицы обратно пропорцио-

нальная площади соответствующей ей волновой поверхности, то есть $\sim \frac{1}{r^2}$; энергия пропорциональна квадрату амплитуды (см. 1.3), поэтому $A \sim \frac{1}{r}$. $\xi(x, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr)$ – уравнение сферической волны.

3) *Учёт затухания волн:*

Затухание волн учитывается с помощью дополнительного экспоненциального множителя (как и в случае затухающих колебаний – см. 5.1): $\xi(x, t) = A_0 e^{-nr} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ для плоской волны и $\xi(x, t) = \frac{A_0}{r} e^{-nr} \cos(\omega t - kr)$ для сферической.

4) *Упругие волны:*

Упругая волна – деформационные возмущения, распространяющиеся в *упругой среде* (то есть среде, деформации которой являются упругими – тело возвращается в прежнее состояние при снятии внешнего воздействия). Классическое волновое уравнение выведено для упругих волн, однако оно верно и для других случаев (например, электромагнитных волн – см. 10).

Упругие волны могут быть продольными (смещение частиц параллельно направлению распространения волны) и поперечными (смещение частиц перпендикулярно к направлению распространения волны).

Рассмотрим упругий стержень с сечением S и плотностью ρ . При его растяжении на Δl возникает сила упругости $F = k\Delta l \Rightarrow k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{FS}{S\Delta l} = \frac{\sigma S}{\Delta l}$, где σ – механическое напряжение.

По определению $E = \frac{\sigma l}{\Delta l}$ – модуль упругости (модуль Юнга) материала стержня. Тогда $\frac{kl^2}{m} = \frac{\sigma Sl^2}{m\Delta l} = E \frac{\Delta V}{m} = \frac{E}{\rho} = V^2$, поэтому скорость продольной (при выводе рассматривались де-

формации растяжения – сжатия) упругой волны $V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Аналогичная формула верна для поперечных волн в твёрдом теле; в этом случае модуль упругости заменяют на модуль сдвига G (если γ – угол сдвига, а $\tau = \frac{F}{S}$ – напряжение сдвига (S – площадь сдвигаемой грани), то

$$G = \frac{\tau}{\gamma}.$$

Энергия, переносимая упругой волной, складывается из потенциальной и кинетической энергий одной из колеблющихся частиц: $T = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$; $U = \frac{k}{2} (\xi_{n+1} - \xi_n)^2$, но из разложений

$\xi(x, t)$ в ряд Тейлора (см. 9.1) $\xi_{n+1} - \xi_n \approx l \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow U = \frac{kl^2}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \frac{mV^2}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$. Таким образом,

энергия, переносимая упругой волной, $W = U + T = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + V^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)$; эту зависимость

можно распространить на произвольную среду, заменив энергию волны плотностью энергии

$w = \frac{\rho}{2} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + V^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)$. Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x , $T = U =$

$$= \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) \Rightarrow w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx); \langle w(t) \rangle = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}.$$

10. Электромагнитные волны в однородной непроводящей среде. Связь между амплитудами и фазами колебаний векторов напряженности электрического и индукции магнитного полей в электромагнитной волне. Энергетические характеристики электромагнитных и упругих волн (плотность потока энергии, интенсивность, векторы Умова и Пойнтинга).

1) Уравнение электромагнитной волны:

Пусть E и B – функции только координаты x (расстояние до источника значительно превышает его размеры). Выберем в плоскости XY прямоугольный контур с обходом в направлении 1–2–3–4.

Тогда $\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = E_y(x+dx)dy;$
 $\int_3^4 \vec{E} d\vec{l} = -E_y(x)dy; \int_2^3 \vec{E} d\vec{l} = -\int_1^4 \vec{E} d\vec{l}$ (по этим участкам обход совершается в разных направлениях).
 Поэтому $\oint_{1234} \vec{E} d\vec{l} = (E_y(x+dx) - E_y(x)) \cdot dy =$

$$= \frac{\partial E_y}{\partial x} dx dy; \iint_{1234} \vec{B} d\vec{S} = B_z dx dy$$
 (считаем dx малым,

поэтому значение B в пределах площадки можно считать постоянным). Аналогично, выбираем в плоскости XZ контур 5–6–7–8:

$$\oint_{5678} \vec{B} d\vec{l} = \frac{\partial B_z}{\partial x} dx dz; \iint_{5678} \vec{E} d\vec{S} = -E_y dx dz.$$

Воспользуемся уравнениями Максвелла: $-\frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{B} d\vec{S} = \oint_l \vec{E} d\vec{l}; \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{E} d\vec{S} = \oint_l \vec{B} d\vec{l}.$ Подставляя полученные значения потоков и циркуляций,

получим $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}; \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t}.$ Продифференцируем эти равенства по x и изме-

ним порядок дифференцирования: $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \right); \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = -\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right);$ подставим

равенства, полученные из уравнений Максвелла: $\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}.$ Таким образом,

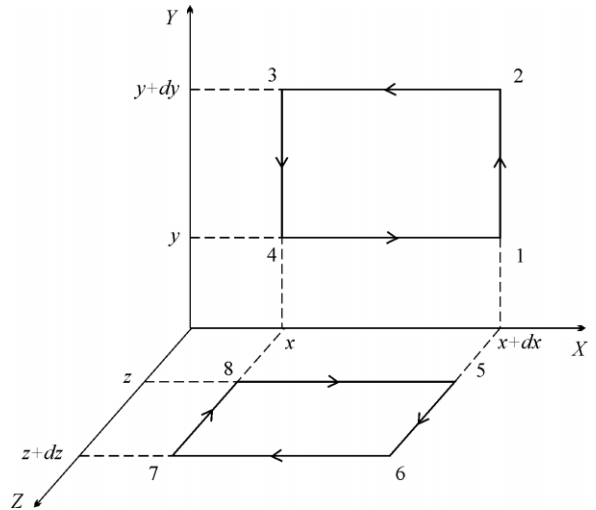
возмущения электрического и магнитного полей распространяются в пространстве с одной и той же скоростью $V = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}},$ причём возмущение электрического поля вызывает

возмущение магнитного; и наоборот.

При выводе уравнения электромагнитной волны были использованы уравнения Максвелла, записанные в условиях отсутствия тока проводимости, поэтому и полученные уравнения верны только для непроводящих сред.

Число $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8$ м/с является скоростью электромагнитной волны в вакууме.

$n = \sqrt{\epsilon \mu}$ – показатель преломления среды; скорость волны в среде $V = \frac{c}{n}.$



2) Связь между напряжённостью электрического поля и индукцией магнитного в электромагнитной волне:

Рассмотрим случай гармонической электромагнитной волны: $E = E_0 \cos(\omega t - kx)$, $B = B_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$; подставим в уравнения (см. п. 1) $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$, $\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t}$: $kE_0 \sin(\omega t - kx) = \omega B_0 \sin(\omega t - kx + \varphi)$; $kB_0 \sin(\omega t - kx + \varphi) = \omega E_0 \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \sin(\omega t - kx)$. Эти уравнения выполняются в случае равенства соответствующих амплитуд и фаз, поэтому $\varphi = 0$; $\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{B_0^2}{\mu\mu_0}$, а поскольку фазы колебаний E и B совпадают, то равенство выполняется в любой момент времени: $\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu\mu_0} \left(B = \frac{E}{V} \right)$.

Как следует из 10.1 при распространении волны вдоль оси x меняются только составляющие E_y и B_z ; таким образом, вектора \vec{E} , \vec{B} и \vec{V} взаимно ортогональны, причём $\vec{V} \uparrow \uparrow [\vec{E}\vec{B}]$ (фазы E и B совпадают, то есть и их максимумы совпадают).

Замечание: в гармонической электромагнитной волне частоты колебаний векторов E и B совпадают. Пусть частоты различны (ω_1 и ω_2), тогда и волновые числа различны $\left(k = \frac{\omega}{V} \right)$; как уже было показано, фазы колебаний совпадают, то есть $(\omega_1 - \omega_2)t + (k_1 - k_2)x = \varphi \Rightarrow \Rightarrow (\omega_1 - \omega_2)t + \frac{x}{V}(\omega_1 - \omega_2) = (\omega_1 - \omega_2) \left(t + \frac{x}{V} \right) = \varphi$. Данное соотношение верно в любой момент времени, поэтому $\left(t + \frac{x}{V} \right)$ может принимать произвольные значения; таким образом, $\omega_1 - \omega_2 = 0$ ($\omega_1 = \omega_2$), $\varphi = 0$.

3) Энергия электромагнитной волны:

Плотности энергии электрического и магнитного полей равны: $w_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$, $w_B = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}$.

Плотность энергии волны $w = w_E + w_B = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu\mu_0} = \frac{EB}{\mu\mu_0 V}$. Таким образом, в электромагнитной волне энергия распределяется поровну между электрической и магнитной составляющими также, как в упругой – между потенциальной и кинетической (см. 9.4).

4) Энергетические характеристики волн:

Плотность потока энергии – количество энергии, переносимой волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению распространения волны. Численно равна энергии, заключённой внутри цилиндра с единичным основанием и образующей V : $S(t) = w(t) \cdot V$. Для электромагнитных волн $S(t) = \frac{EB}{\mu\mu_0}$.

Интенсивность – среднее по времени значение плотности потока энергии: $I = \langle S(t) \rangle = \langle w(t) \rangle \cdot V$. Для упругих волн $I = \frac{\rho A^2 \omega^2 V}{2}$; для электромагнитных $I = \frac{E_0 B_0}{2\mu\mu_0}$.

Вектор Умова – вектор, направленный вдоль направления распространения волны и равный по модулю плотности потока энергии. $\vec{S}(t) = w(t) \cdot \vec{V}$. Для электромагнитных волн

можно ввести аналогичную величину, названную вектором Пойнтинга: $\vec{S}(t) = \frac{[\vec{E}\vec{B}]}{\mu\mu_0}$.

Векторная интенсивность волны – среднее по времени значение вектора Умова (Пойнтинга): $\langle \vec{S}(t) \rangle = \langle w(t) \rangle \cdot \vec{V}$. Для упругих волн $\langle \vec{S}(t) \rangle = \frac{\rho A^2 \omega^2 \vec{V}}{2}$, для электромагнитных $\langle \vec{S}(t) \rangle = \frac{[\vec{E}_0 \vec{B}_0]}{2\mu\mu_0}$.

Поток энергии волны – поток векторов Умова (Пойнтинга): $\Phi(t) = \iint_S \vec{S}(t) d\vec{S}$. Можно также вычислить среднее по времени значение потока: $\langle \Phi(t) \rangle = \iint_S \langle \vec{S}(t) \rangle d\vec{S}$.

11. Наложение волн. Когерентные волны. Интерференция волн от двух точечных источников, опыт Юнга. Роль монохроматичности источников и их конечных размеров. Время и длина когерентности, число когерентных колебаний, радиус и угол когерентности, объём когерентности.

1) Наложение волн:

Будем считать, что выполняется принцип суперпозиции: результирующий эффект от наложения двух волн есть сумма эффектов от каждой из волн (волны не влияют друг на друга). Рассмотрим наложение двух волн, вызывающих колебания частиц в одном и том же направлении; пусть обе волны являются монохроматическими (в каждой из волн имеются колебания только одной частоты). Тогда необходимо сложить два колебания, направленные вдоль одной прямой, – этот случай рассмотрен в 4.1. $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi$; $\langle A^2 \rangle =$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T A^2 dt = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \langle \cos \Delta\varphi \rangle.$$

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды

(см. 1.3, 10.4), поэтому результирующая интенсивность $I = I_1 + I_2 + \Delta I$, $\Delta I = 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \Delta\varphi \rangle$.

Если колебания некогерентны, то $\langle \cos \Delta\varphi \rangle = 0 \Rightarrow \Delta I = 0$; $I = I_1 + I_2$ (даже в этом случае среднее значение $\cos \Delta\varphi$ за малый промежуток времени τ отлично от нуля, но такого времени τ недостаточно для фиксации интерференционной картины оптическим прибором). Если колебания когерентны, то результирующая интенсивность может оказаться больше или меньше суммы интенсивностей налагающихся волн – происходит перераспределение энергии в пространстве; в этом случае наложение волн называют интерференцией.

Интерференция – перераспределение энергии при наложении двух волн, сохраняющееся в течение достаточно длинного времени.

Пусть накладываются две волны, распространяющиеся вдоль одной прямой: $\xi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + k_1 r)$, $\xi_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + k_2 r + \varphi)$; тогда разность фаз составляет $\Delta\varphi = (\omega_1 - \omega_2)t + k_1 r_1 - k_2 r_2 - \varphi$. Для когерентности волн (постоянства их разности фаз) требуется, очевидно, равенство частот колебаний $\omega_1 = \omega_2$ и постоянство величины $(k_1 r_1 - k_2 r_2)$; k представляют в виде $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{V} = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi}{n\lambda_0}$, используя формулу $\lambda = VT = \frac{2\pi V}{\omega}$; λ_0 – длина световой волны в вакууме. Таким образом, $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta + \varphi$, где $\Delta = n_1 r_1 - n_2 r_2$ – оптическая разность

хода ($\Delta = nr$ – оптический путь луча). При $\varphi = 0$ условие минимума – $\Delta\varphi = \pi + 2\pi m \Rightarrow \Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0$; условие максимума – $\Delta\varphi = 2\pi m \Rightarrow \Delta = m\lambda_0$.

2) Интерференция волн от двух точечных источников; опыт Юнга:

Пусть имеются два точечных когерентных точечных источника; тогда положения интерференционных максимумов и минимумов будут определяться постоянством величины $r_1 - r_2$, где r_1 и r_2 – расстояния до источников. Геометрическое место подобных точек – гиперболоиды вращения, в фокусах которых находятся источники.

Рассмотрим интерференционную картину от двух точечных источников, наблюдаемую на удалённом плоском экране. Источники находятся в точках A и B ; $AB = d$. По теореме Пифагора

$$r_1^2 = l^2 + \left(\frac{d}{2} + y\right)^2, \quad r_2^2 = l^2 + \left(\frac{d}{2} - y\right)^2 \Rightarrow r_1^2 - r_2^2 =$$

$= (r_1 + r_2)\Delta r = 2dy$. Если $d \ll l$, то $r_1, r_2 \approx l$; $l \cdot \Delta r \approx dy \Rightarrow y \approx \frac{l\Delta r}{d}$. Таким образом, условие

максимума $\Delta r = m\lambda \Rightarrow y_{\max} = \frac{m\lambda l}{d}$;

условие минимума $\Delta r = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{\min} = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda l}{d}.$$

В опыте Юнга лучи от одного и того же источника проходят через разные отверстия в экране, поэтому реализуется схема интерференции от двух точечных источников. Интерферирующие лучи имеют одну и ту же амплитуду, поэтому в каждой точке «складываются» два луча:

$$E_1 = E_0 \cos(\omega t - kr_1),$$

$$E_2 = E_0 \cos(\omega t - kr_2). \quad E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\left(\frac{k}{2}\Delta r\right) \cdot \cos\left(\omega t - \frac{k}{2}(r_1 + r_2)\right),$$

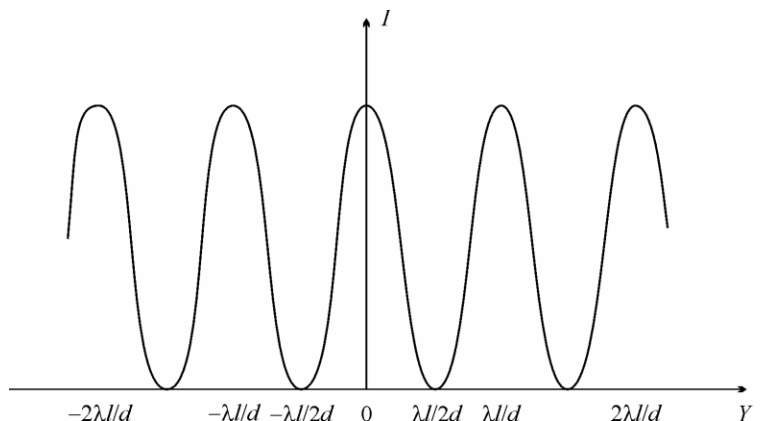
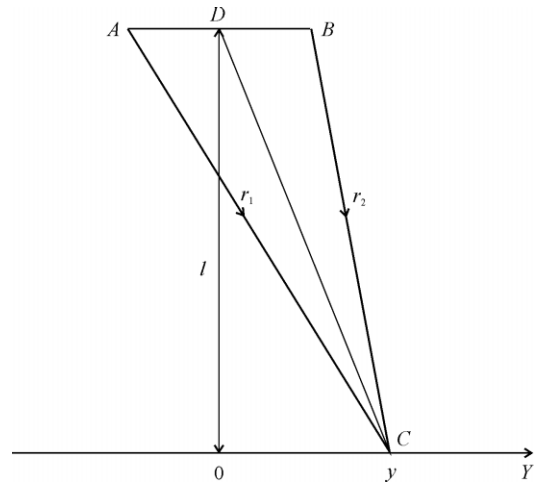
то есть амплитуда результирующих колебаний зависит от Δr . Поэтому интенсивность лучей, попадающих на экран $I(y) = 4I_0 \cos^2 \frac{k}{2}\Delta r = 4I_0 \cos^2 \frac{k y d}{2l} = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi y d}{\lambda l}$.

3) Роль некогерентности источников:

Время когерентности – время, в течение которого можно наблюдать интерференционную картину.

Пусть два источника испускают волны частот ω_1 и ω_2 . Тогда время, в течение которого можно наблюдать интерференционную картину, равно времени, за которое разность фаз колебаний изменяется на π , поэтому $|\omega_1 - \omega_2| t_k = \pi \Rightarrow t_k = \frac{\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$. Если источник испускает

непрерывный спектр волн, частоты которых изменяются от ω до $\Delta\omega$, то полное изменение интерференционной картины произойдёт при разности фаз между соседними волнами в 2π



(для каждой волны с частотой от ω до $(\omega + \Delta\omega/2)$ найдётся волна с частотой от $(\omega + \Delta\omega/2)$ до $(\omega + \Delta\omega)$, имеющая с ней сдвиг фаз π , в конечном счёте все волны «нейтрализуют» друг друга). Таким образом, для этого случая $t_k = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

Число когерентных колебаний: $N_k = \frac{t_k}{T} = \frac{2\pi}{T \cdot \Delta\omega} = \frac{\omega}{\Delta\omega} \approx \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$. Это число равно максимальному порядку интерференции, который можно наблюдать при данной некогерентности источника волн.

Волновой цуг – серия колебаний, испускаемых атомом за время высвечивания (τ), то есть за время перехода из возбуждённого состояния в невозбуждённое ($\tau \sim 10^{-8}$ с).

Длина когерентности – длина цуга волн, на которой сохраняется когерентность:

$$l_k = Vt_k = \frac{\lambda t_k}{T} = \lambda N_k \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \cdot t_k = \frac{l_k}{V} \approx \frac{\lambda^2}{V \cdot \Delta\lambda}.$$

4) *Роль размеров источника:*

Угол когерентности – телесный угол, в котором лучи, испускаемые источником, можно считать когерентными.

Радиус когерентности – линейный размер участка сферической поверхности, окружающей источник, на котором лучи можно считать когерентными.

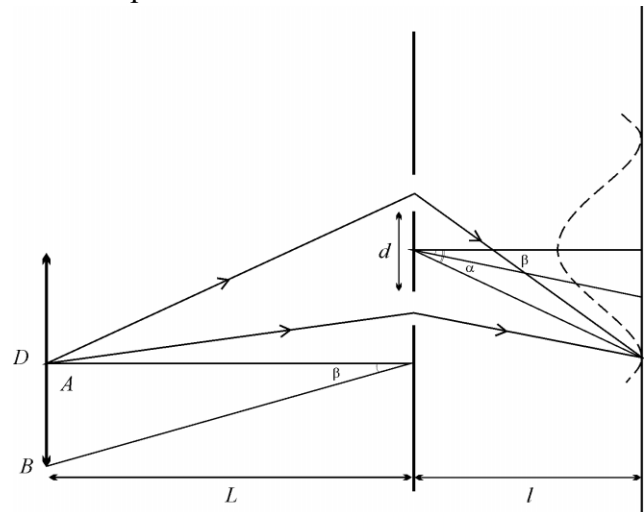
Вычислим указанные параметры для случая наблюдения интерференционной картины в опыте Юнга: источник представляет собой стержень длины D . Тогда, очевидно, интерференционные картины от точек A и B будут сдвинуты на угол β . При $L \gg D$ $\beta \approx \text{tg } \beta = \frac{D}{2L}$. Тогда интерференционная картина будет наблюдаться при $\beta < \alpha$, где α – угловая полуширина первого минимума.

$$\alpha = \frac{y_{\min}^1}{l} = \frac{\lambda}{2d} \quad (\text{см. 11.2}); \quad \beta < \alpha \Rightarrow \frac{D}{L} < \frac{\lambda}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d < r_k = \frac{\lambda L}{D}. \quad \varphi_k = \frac{r_k}{L} = \frac{\lambda}{D} = \frac{\lambda}{\beta L}, \quad \text{где } 2\beta -$$

угловой размер источника.

Объём когерентности – объём области пространства, в которой лучи, испускаемые протяжённым некогерентным источником, можно считать когерентными. $V_k = \pi r_k^2 l_k$.



12. Интерференция волн, отражённых от одной поверхности (стоячие волны). Фаза отражённой волны – упругой и электромагнитной. Интерференция волн, отражённых от двух поверхностей. Полосы равной ширины и равного наклона. Пространственная локализация интерференционной картины. Формула Вульфа-Брэгга.

1) *Интерференция волн, отражённых от одной поверхности:*

Пусть уравнения падающей и отражённой волн, распространяющихся вдоль одной и той же прямой, имеют вид: $\xi_1 = A_0 \cos(\omega t + kx)$, $\xi_2 = A_0 \cos(\omega t - kx - \varphi_0)$. $\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A_0 \cos\left(kx + \frac{\varphi_0}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\varphi_0}{2}\right)$. Таким образом, амплитуда колебаний не зависит от времени; возникает так называемая «стоячая» волна. Максимумам (пучностям) амплитуды соот-

ветствуют $kx + \frac{\varphi_0}{2} = m\pi$; минимумам (узлам) амплитуды соответствуют $kx + \frac{\varphi_0}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$.

Определим разность фаз падающей и отражённой волны: если на границе наблюдается пучность (отражение от менее плотной среды – скорость в такой среде выше), то при $x = 0$ (граница раздела фаз) $\varphi_0 = 2\pi m$, что эквивалентно отсутствию разности фаз. Если на границе наблюдается узел (отражение от более плотной среды), то при $x = 0$ $\varphi_0 = \pi + 2\pi m$ – разность фаз π , «потеря пол-волны».

Аналогичная картина наблюдается в случае электромагнитных волн – здесь наиболее важны колебания вектора E (именно они обуславливают восприятие электромагнитных волн оптическими приборами). Пучность возникает при отражении от оптически менее плотной среды (среды с меньшим ϵ , то есть с меньшим n) – сдвиг фаз отсутствует; узел – при отражении от поверхности оптически более плотной среды (среды с большим n) – сдвиг фаз π .

В электромагнитной волне при изменении направления скорости (отражении от границы раздела фаз) может измениться направлении только одного вектора – либо E , либо B , поскольку $\vec{V} \uparrow\uparrow [\vec{E}\vec{B}]$. Поэтому в «стоячей» волне происходит сдвиг фаз между колебаниями E и B – пучностям E соответствуют узлы B ; максимумы электрической и магнитной составляющей энергии разделены пространственно. Аналогичное явление наблюдается для упругих волн – максимумы кинетической энергии находятся в местах пучностей, максимумы потенциальной – в узлах.

2) Интерференция волн, отражённых от двух поверхностей:

Пусть три различные среды разделены плоскими границами. Луч света падает на границу сред 1 и 2 под углом α ; часть энергии падающего луча переходит в отражённый луч, а другая часть – в преломлённый в среду 2 под углом β . Аналогичное явление происходит на границе раздела сред 2 и 3 – отражённый здесь луч II вновь преломляется на первой границе и выходит в среду 1 под углом α . В результате параллельные лучи I и II интерферируют.

Опустим из точек C и M перпендикуляры на лучи I и III: $AH_1 = MH_2 = AM \sin \beta$; $AD_1 = D_1D_2 = AM \sin \alpha$;

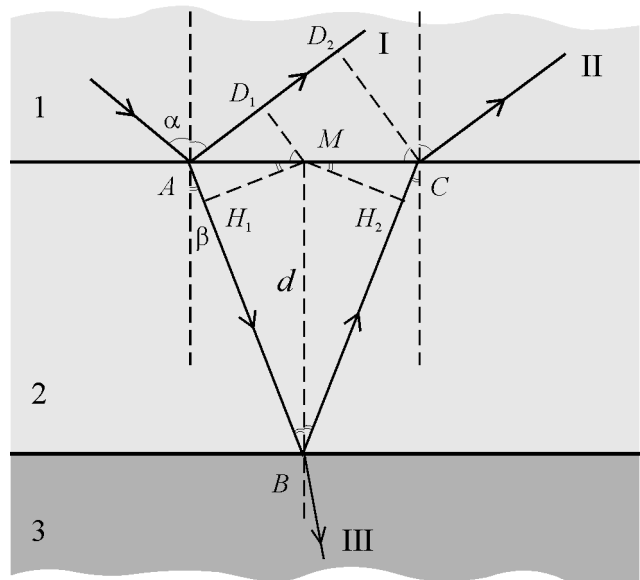
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow n_2 AH_1 = n_1 AD_1, \text{ то есть оптические}$$

пути на участках $AH_1 + CH_2$ и AD_2 совпадают. Таким образом, $\Delta = n_2 (BH_1 + BH_2) = 2dn_2 \cos \beta$. Если на каждой из границ отражение происходит от оптически более плотной среды, то каждый из лучей «теряет» $\lambda/2$, поэтому сдвиг фаз между интерферирующими лучами $\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}$. Условие максимумов: $2dn_2 \cos \beta = m\lambda_0$; условие минимумов:

условие минимумов: $2dn_2 \cos \beta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0$. Если среда 3 идентична среде 1, то луч I теряет $\lambda/2$, а луч II –

нет. Условие максимумов: $2dn_2 \cos \beta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0$; условие минимумов: $2dn_2 \cos \beta = m\lambda_0$.

В рассмотренном случае интерференционная картина локализована на бесконечности, поэтому для её наблюдения нужно установить на пути лучей собирающую линзу, поместив



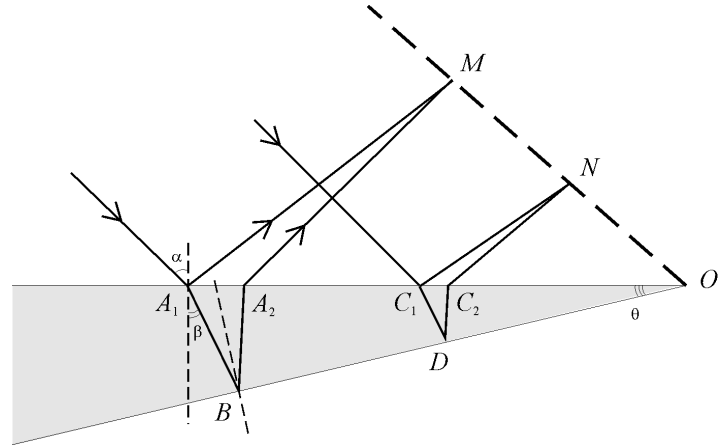
экран в фокальной плоскости.

Важное применение интерференции волн, отражённых от двух параллельных плоскостей, связано с так называемым «просветлением» оптики. На поверхность линз оптических приборов наносят тонкие плёнки такой толщины, что интерференция «гасит» отражённые лучи; в результате не происходит потерь энергии из-за отражения.

3) *Интерференционные эффекты:*

1. Цвета тонких плёнок: при наблюдении тонких плёнок в белом свете они окрашиваются в цвета, для которых длины волн удовлетворяют условию максимумов (см. 12.2). Интерференционная картина локализована на бесконечности.

2. Полосы равной ширины: при освещении белым светом плёнки переменной толщины участки разной толщины будут окрашены в разные цвета (соответствующие цветам тонких плёнок этой толщины). Подобную интерференционную картину можно наблюдать, например, при интерференции света, отражённого от тонкого клина.

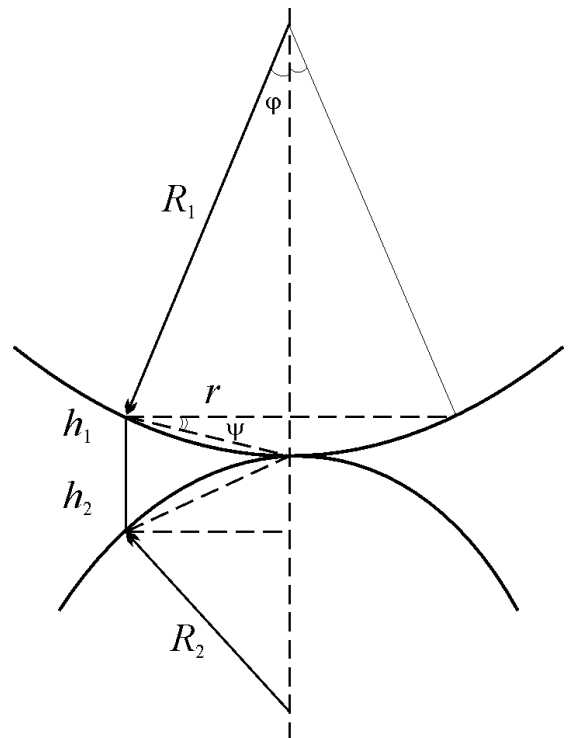


Определим пространственную локализацию интерференционной картины: пусть лучи падают на клин под углом α , тогда угол преломления β одинаков для всех лучей, а все остальные углы – функции β , θ (угол при ребре клина) и n . Таким образом, лучи, выходящие из клина, также параллельны. Пусть M и N – точки пересечения соответствующих отражённого и преломлённого лучей, которые, возможно, не лежат на одной прямой с точкой O . Из подобия треугольников OC_2D и OA_2B , OC_1D и OA_1B получим, что $\frac{OC_2}{OA_2} = \frac{OD}{OB} = \frac{OC_1}{OA_1}$, поэтому и $\frac{C_1C_2}{A_1A_2} = \frac{OC_1}{OA_1}$. Из параллельности лучей треуголь-

ники C_1C_2N и A_1A_2M подобны, поэтому $\frac{C_1N}{A_1M} = \frac{C_1C_2}{A_1A_2} = \frac{OC_1}{OA_1}$; следовательно, треугольники

OC_1N и OA_1M подобны по двум сторонам и углу между ними, то есть углы NOC_1 и MOA_1 равны, а это означает, что прямые OM и ON совпадают. Таким образом, интерференционная картина располагается в плоскости, проходящей через ребро клина. Если свет падает на полоску переменной толщины, то, очевидно, интерференционная картина не будет плоской, однако она всё равно не может оказаться локализованной на бесконечности.

Другой пример полос равной ширины – кольца Ньютона, возникающие вокруг точки соприкосновения двух линз (или линзы и пластинки). При наблюдении на отражение луч частично отражается от поверхности одной из линз, а частично – преломляется. Преломлённый луч частично отражается от поверхности второй линзы и вновь преломляется на первой линзе. Если пространство между выпуклыми линзами



заполнено воздухом, то
$$\Delta = n(h_1 + h_2) + \frac{\lambda_0}{2}. \varphi \approx \text{tg } \varphi = \frac{r}{R_1} \Rightarrow \psi \approx \frac{\varphi}{2} \approx \frac{r}{2R_1},$$

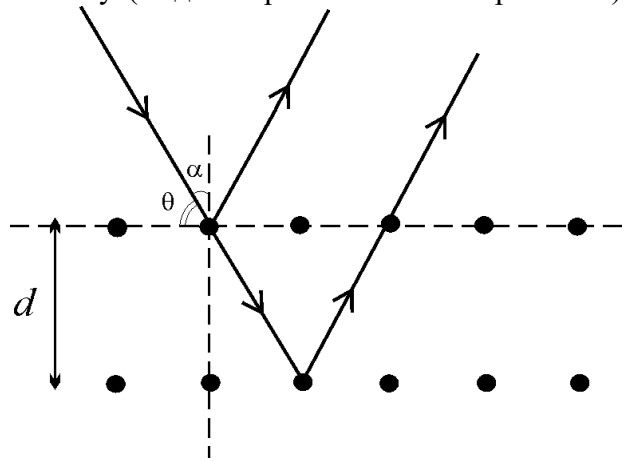
$h_1 = r \operatorname{tg} \psi \approx \frac{r^2}{2R_1}$; аналогично $h_2 = \frac{r^2}{2R_2} \Rightarrow \Delta = r^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\lambda_0}{2}$. Образование тёмных колец

– интерференционный минимум $\Delta = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda_0 \Rightarrow r_m = \sqrt{m \lambda_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$ – радиус m -го тёмного кольца Ньютона. Интерференционная картина локализована на бесконечности.

3. Полосы равного наклона: если на плёнку одинаковой толщины под разными углами падают лучи света, то образуются полосы равного наклона – для разных углов падения (то есть разных β) могут реализовываться условия минимума или максимума. Интерференционная картина локализована на бесконечности.

4. Формула Брэгга-Вульфа:

При падении лучей на двумерную узловую сетку (модель кристаллической решётки) наблюдается картина, аналогичная интерференции лучей, отражённых от двух параллельных поверхностей – в этом случае среда везде одна и та же, поэтому условие максимумов запишется как $2d \cos \alpha = m\lambda$, $m \in \mathbb{Z}_+$. В рентгенографии обычно измеряют не угол падения луча, а так называемый *угол скольжения* $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, поэтому условие максимумов запишется как $2d \sin \theta = m\lambda$ – формула Брэгга-Вульфа, основное соотношение рентгеноструктурного анализа.



13. Интерференционные компараторы. Рефрактометры и спектральные приборы. Рефрактор Жамена. Спектральный аппарат Фабри-Перо. Принципы Фурье-спектроскопии. Представление о голографии.

1) Интерференционные методы исследования; интерференционные компараторы:

Интерференционная картина определяется тремя параметрами: λ , n и Δr . Поэтому, зная два из трёх параметров, можно определить недостающий – на этом основаны интерференционные методы исследования.

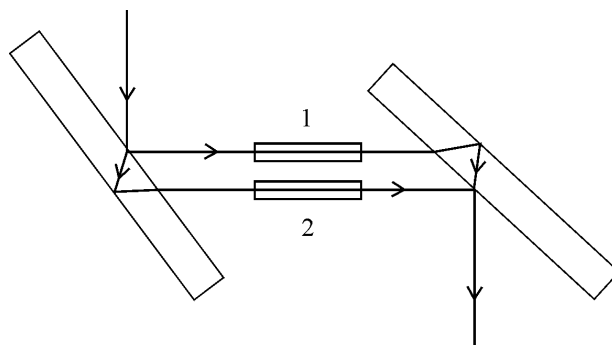
С помощью интерференционных компараторов определяют линейные размеры того или иного объекта при известных λ и n . Для определения длины объекта его помещают между двумя плоскопараллельными пластинками, которые непараллельны между собой для создания полос равной толщины. Затем по сдвигу интерференционных полос по сравнению с пустой областью или областью, занятой эталоном, рассчитывают длину объекта в соответствующем измерении. В качестве эталона берут тщательно отшлифованные плоскопараллельные пластинки. Возможно также использование интерферометра Майкельсона (см. 13.4) в качестве интерференционного компаратора – одно из боковых зеркал закрепляется на исследуемом объекте.

2) Рефрактометр Жамена:

Рефрактометр – интерференционный прибор, позволяющий по известным длине волны и разности хода лучей определить показатель преломления среды.

В рефрактометре Жамена луч падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку и разделяется на два луча, которые проходят через кюветы 1 и 2 с разными веществами. Затем лучи вновь попадают на плоскопараллельную пластинку, расположенную под некоторым углом к первой, накладываются и интерферируют, образуя полосы равной толщины. Сдвиг

этих полос при заполнении одной из кювет исследуемым веществом позволяет определить показатель преломления по уравнению $\Delta = (n_2 - n_1)l = \Delta m \cdot \lambda$, где l – длина кюветы; Δm – число полос, на которое сдвинулась интерференционная картина.



Оценим точность рефрактометра Жамена: если длина кювет $l = 5$ см, длина волны используемого света $\lambda = 500$ нм, а регистрирующий прибор фиксирует сдвиг на $\Delta m > 0.1$ полосы, то $\Delta n = \frac{\Delta m \cdot \lambda}{l} = 10^{-6}$; точность может быть

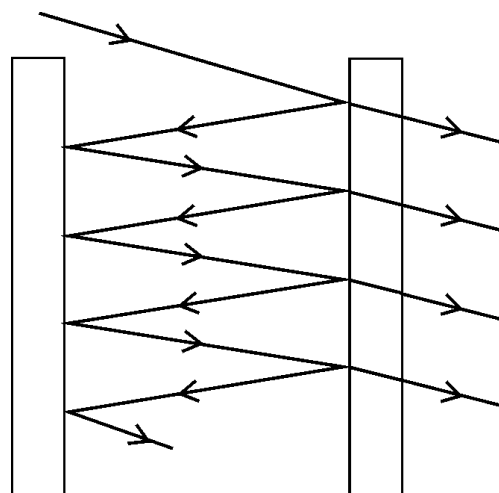
повышена с помощью удлинения кювет или повышения чувствительности регистрирующего прибора.

Рефрактометрические исследования позволяют определять молекулярную рефракцию вещества, рассчитываемую по формуле $R_M = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{M}{\rho}$; по формуле Лоренц-Лоренца

$R_M = \frac{4\pi}{3} N_A \alpha$, где N_A – число поляризуемых частиц в единице объёма, α – содержание компонента; M – молярная масса. Таким образом, молекулярная рефракция пропорциональна электронной поляризуемости, а поскольку электронная поляризуемость обладает свойством аддитивности, то и молекулярная рефракция обладает тем же свойством.

3) Спектральный аппарат Фабри-Перо:

Спектральный аппарат Фабри-Перо состоит из двух параллельных стеклянных (или кварцевых) пластин, внутренние поверхности которых покрыты отражающим слоем с коэффициентом отражения r . Входящий луч будет многократно отражаться от поверхностей пластин, постепенно теряя энергию из-за частичного прохождения. Проходящие лучи интерферируют, образуя интерференционную картину, локализованную на бесконечности. Интерференционные максимумы для волн разных длин будут разделены пространственно, причём из-за большого количества лучей разрешающая способность окажется высокой.



Оценим разрешающую способность аппарата Фабри-Перо, используя формулу для дифракционной решётки (см. 16.2): $R = mN$. В данном случае N – число лучей, вышедших из аппарата; интен-

сивность N -го луча в r^{-2N} раз меньше первого, поэтому $N = \frac{\ln I_N / I_1}{2 \ln r}$; считая отношение интен-

сивностей равным 10^{-2} , а $r \sim 0.8 - 0.9$, получим, что $N \sim 10 - 100$. $m = \frac{\Delta}{\lambda_0}$: разность хода – это удвоенное расстояние между пластинами (~ 10 см), поэтому $m \sim 10^5 - 10^6$. Таким образом, $R \sim 10^6 - 10^8$. Свободную спектральную область можно также оценить по формуле для решётки: $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$, то есть всего $10^{-5} - 10^{-6} \lambda$, поэтому данный прибор используют для исследования тонкой структуры спектров.

4) Представление о Фурье-спектроскопии:

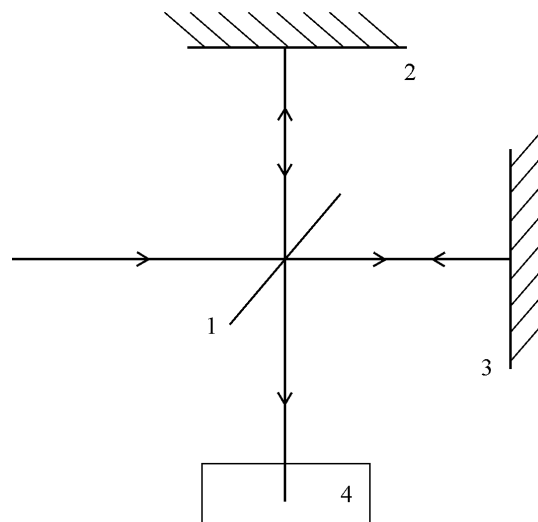
Основной частью Фурье-спектрометра является интерферометр Майкельсона: луч падает на стеклянную пластинку 1, частично отражающий свет на зеркало 2, а частично преломляющий его на зеркало 3; отражённые от зеркал лучи вновь попадают на пластинку 1, отражаются и попадают в регистрирующее устройство 4. Эти лучи имеют разные фазы и интерферируют. Пусть исходное монохроматическое излучение (частоты ω) разделяется на две одинаковые по энергии составляющие: $\frac{I_0(\omega)}{2}$. Тогда регистрируемая интенсивность луча

$I(\omega) = I_0(\omega)(1 + \cos \Delta\varphi)$ (см. 11.1). Если в начальный момент установить зеркала 2 и 3 так, что $\Delta\varphi = 0$, то при поступательном перемещении одного из зеркал со скоростью v $\Delta\varphi(t) = 4\pi \frac{\Delta r(t)}{\lambda} =$

$\frac{4\pi}{\lambda} vt = \frac{2v\omega t}{V}$, где V – фазовая скорость волны (мно-

житель 2 обусловлен тем, что разность хода в два раза больше перемещения зеркала). Поэтому регистрирующее устройство зафиксирует наличие переменной составляющей интенсивности $\tilde{I}(t) =$

$I_0(\omega) \cos \omega\tau$, где $\tau = \frac{2v}{V}t$.



При подаче на интерферометр волн нескольких частот их переменные составляющие интенсивности будут складываться, поэтому для непрерывного спектра может быть записан сигнал $F(\tau) = \int_0^{\infty} I(\omega) \cos \omega\tau d\omega$ – обратное преобразование Фурье исходного спектра. Спектральный состав падающего излучения может быть найден с помощью прямого преобразо-

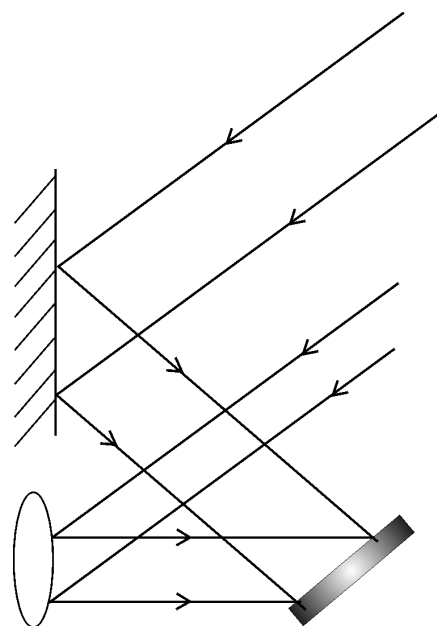
вания Фурье: $I(\omega) = k \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \cos \omega\tau d\tau$. Основное *преимущество* Фурье-спектрометров –

возможность одновременной фиксации всего спектра целиком, а не отдельных частей спектра как в обычных спектральных приборах.

5) Представление о голографии:

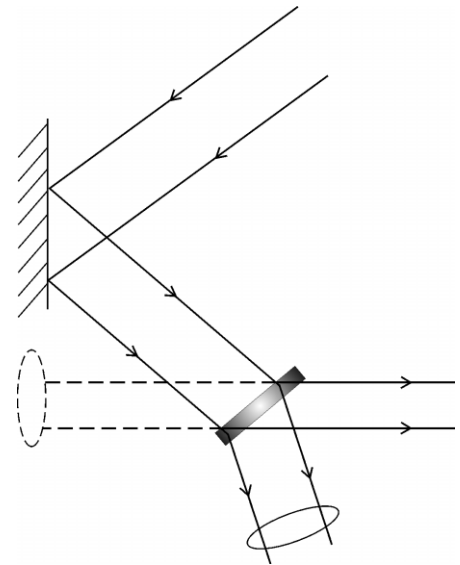
Голография – способ фиксации объёмного изображения предмета, основанный на явлении интерференции волн. В этом методе фиксируются как амплитуды, частоты, так и разности фаз волн, рассеянных предметом. При съёмке голограммы фиксируют интерференционную картину между лучами источника (*опорной волной*) и лучами, рассеянными предметом (*сигнальной волной*). Голограмма представляет собой пластинку, покрытую фотоэмульсией; эмульсионный слой позволяет фиксировать минимумы и максимумы интерференционной картины. Для восстановления изображения, зафиксированного на голограмме, её облучают опорной волной, сохраняя ориентацию пластинки по отношению к пучку. Волны дифрагируют на зафиксированной интерференционной картине, образуя два изображения – мнимое (на месте объекта съёмки) и действительное.

Особенностью голографии является сохранение полного изображения любым участком голограммы; при восстановлении изображения по части исходной голограммы



уменьшается разрешение, но воспроизводится весь снятый объект.

В голографии для создания интерференционной картины требуются источники, излучение которых имеет достаточно большое время и длину когерентности. Поэтому для получения голограмм используют лазеры, однако в этом случае изображение получается одноцветным. Существуют два пути получения цветных голограмм: во-первых, использование лазеров с излучением разных цветов (например, красного, синего и зелёного). Во-вторых, съёмка и восстановление голограммы в белом цвете – в этом случае применяют толстослойные фотоэмульсии, поэтому интерференционные максимумы разных цветов попадают на разные глубины эмульсии. Образуется так называемая *трёхмерная* голограмма в отличие от *двумерных* голограмм, получаемых с помощью лазеров.



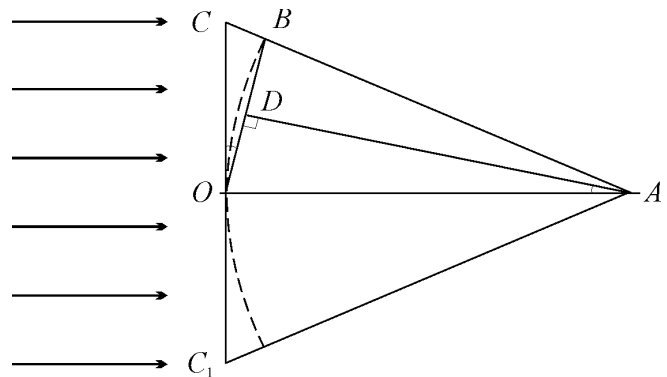
14. Дифракция волн. Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля. Дифракция волн на круглом отверстии и круглой преграде. Амплитудная и фазовая зонные пластинки. Дифракция Фраунгофера на щели. Условия максимумов и минимумов дифракционной картины.

1) *Метод зон Френеля:*

Дифракция волн – явление огибания волнами препятствий; или, в более широком смысле, любое отклонение от законов геометрической оптики (см. 15.1).

Принцип Гюйгенса-Френеля: 1) любая точка на волновой поверхности может рассматриваться как самостоятельный источник сферических волн (их называют *вторичными*); 2) амплитуда колебаний в любой точке пространства может быть найдена как результат интерференции вторичных волн.

Метод *зон Френеля* состоит в выделении на волновой поверхности таких областей, что разность хода лучей, излучаемых соседними зонами, составляет $\lambda/2$. Рассмотрим случай падения плоской волны на экран. Проведём окружность радиуса OA с центром в точке A ; B – точка пересечения этой окружности и прямой AC . AD – перпендикуляр к хорде BO . Тогда углы OAD и BOC равны, поэтому ($OC \ll OA$)



$$\frac{OD}{OA} \approx \frac{BC}{OC}. \quad OC = r_m, \quad OA = l, \quad OD \approx \frac{OC}{2} \approx \frac{r_m}{2};$$

$BC = a$ – разность хода лучей, приходящих в точку A из O и C ($AB = AO$). Таким образом,

$$\frac{r}{2l} \approx \frac{a}{r} \Rightarrow r \approx \sqrt{2al}; \quad \text{точка } C \text{ – внешняя граница } m\text{-ой зоны Френеля, поэтому}$$

$$a = \frac{m\lambda}{2} \Rightarrow r_m = \sqrt{m\lambda l}.$$

Далее рассмотрим случай дифракции на том же экране волны, испускаемой источником, находящимся на прямой OA . Разность хода, набираемая лучами, приходящими в точку

C , до экрана может быть вычислена аналогично предыдущему случаю: $\Delta r = \frac{r^2}{2L}$, где L – рас-

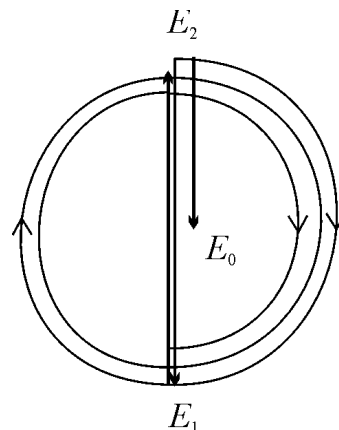
стояние от источника до экрана. Тогда $\frac{r_m^2}{2} \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{L} \right) = \frac{m\lambda}{2} \Rightarrow r_m = \sqrt{m\lambda l^*}$, где $l^* = \frac{lL}{l+L}$.

Площадь m -ой зоны Френеля $S_m = \pi(r_m^2 - r_{m-1}^2) = \pi\lambda l^*$ – не зависит от номера зоны, то есть все зоны Френеля имеют одинаковые площади.

Замечание: радиусы зоны Френеля найдены безотносительно к положению отверстия и зависят только от положения точки на экране; центр зон Френеля всегда находится «напротив» той точки, для которой эти зоны построены; соответственно, при перемещении из одной точки экрана в другую зоны Френеля сдвинутся в том же направлении.

2) Дифракция волн на круглом отверстии и круглой преграде:

При создании в экране круглого отверстия для точек, расположенных вдоль оси отверстия, «открыты» какие-то зоны Френеля. Интенсивность света в таких точках может быть найдена с помощью метода векторных диаграмм: разобьём каждую зону Френеля на малые кольца; тогда вектор E от каждого из таких колец будет постепенно поворачиваться (увеличивается разность хода); «последний» вектор первой зоны Френеля будет иметь разность фаз π с первым, поэтому результирующая амплитуда от первой зоны Френеля составит $2E$, где E – радиус окружности. При аналогичном построении для второй зоны Френеля «последний» вектор придёт в точку, лежащую чуть ниже начальной, поскольку интенсивность постепенно уменьшается (интенсивность излучения точечного источника пропорциональна $\frac{1}{r^2}$). Результирующая интенсивность от



первой и второй зон Френеля окажется близкой к нулю. Проводя такие же построения для следующих зон Френеля, можно получить, что при открытии нечётного числа зон Френеля в центре исследуемой картины будет наблюдаться светлое пятно, а при открытии чётного числа зон – тёмное. При открытии всех зон Френеля спираль постепенно сойдётся к своему центру; результирующая амплитуда составит E , а интенсивность – I ; при этом реализуется обычное прохождение света, то есть $I = I_0$. Поэтому при открытии небольшого нечётного числа зон Френеля произойдёт усиление света в центре дифракционной картины – интенсивность составит $4I_0$.

Для точек, не лежащих на оси отверстия, будут открыты не вся первая, но зато части других зон Френеля; поэтому вокруг центрального пятна (светлого или тёмного) будут возникать кольца. При дифракции белого света картина станет цветной, поскольку радиусы зон Френеля различны для разных длин волн.

Явление дифракции Френеля на круглом отверстии используют для создания зонных пластинок. В амплитудных зонных пластинках чётные зоны Френеля затемнены, поэтому интенсивность в центре дифракционной картины во много раз больше интенсивности падающего света. В фазовой зонной пластинке на месте чётных зон Френеля вырезаны полосы так, что проходящий через них свет набирает дополнительную разность хода $\lambda/2$ по сравнению с лучами, прошедшими через нечётные зоны. В этом случае весь свет, падающий на пластинку, собирается в центре дифракционной картины: зонные пластинки работают как собирающие линзы. Основным недостатком таких линз является хроматическая аберрация – пластинка собирает только монохроматический свет с определённой длиной волны и непригодна для фокусирования белого света.

При дифракции на круглом препятствии первые зоны Френеля оказываются закрытыми, а в центре дифракционной картины всегда имеется светлое пятно (пятно Пуассона), поскольку туда приходит свет от всех незакрытых зон Френеля, создавая (при малых размерах препятствия) интенсивность $\sim I_0$. Вокруг пятна Пуассона образуются тёмные и светлые кольца – как и при дифракции на круглом отверстии.

3) Дифракция Фраунгофера на щели:

Дифракция Фраунгофера – дифракция, наблюдаемая в параллельных лучах.

Пусть на щель ширины b падает монохроматический свет с интенсивностью I_0 , соответствующей амплитуде колебаний E_0 . Тогда на участок щели длиной dx приходится амплитуда $E = \frac{E_0}{b} dx$. Найдём уравнение колебаний волн, рассеянных под углом φ : от участка щели $E_\varphi = \frac{E_0}{b} dx \cos(\omega t - kx \sin \varphi)$,

от всей щели $E = \int_0^b \frac{E_0}{b} \cos(\omega t - kx \sin \varphi) dx =$
 $= \frac{-E_0}{bk \sin \varphi} (\sin(\omega t - kb \sin \varphi) - \sin \omega t) =$

$$= \frac{2E_0}{kb \sin \varphi} \sin \frac{kb \sin \varphi}{2} \cos \left(\omega t - \frac{kb \sin \varphi}{2} \right) = \frac{E_0}{\alpha} \sin \alpha \cos(\omega t - \alpha), \quad \text{где } \alpha = \frac{kb \sin \varphi}{2} = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}.$$

Таким образом, интенсивность лучей, собираемых линзой на экран $I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$.

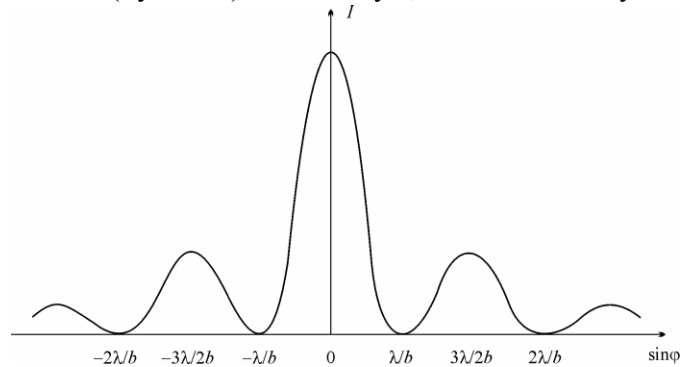
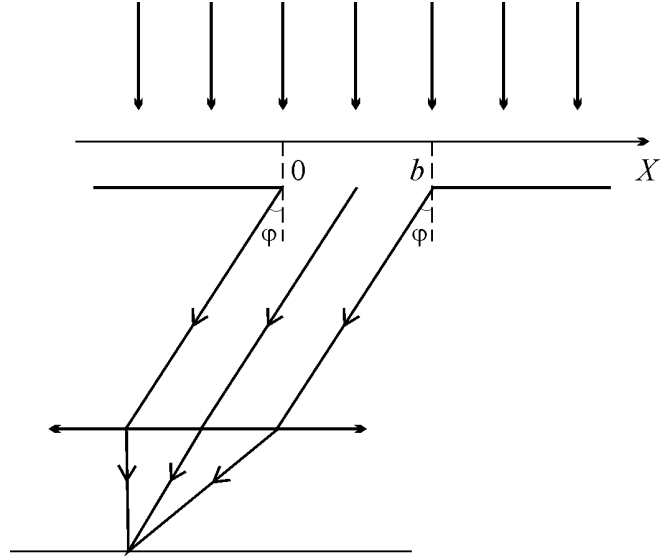
Минимумы достигаются при $\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pi m \ (m \neq 0) \Rightarrow \sin \varphi_{\min} = \frac{m\lambda}{b}, \ m \in \mathbb{Z}$. Мак-

симумы достигаются при $\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi m \ (m \neq -1, 0) \Rightarrow \sin \varphi_{\max} = \frac{(2m+1)\lambda}{2b}$. При $\alpha = 0$

(то есть $\varphi = 0$) реализуется центральный (нулевой) максимум; в этом случае

$$E_\varphi = \frac{E_0}{b} \cos \omega t \cdot dx \Rightarrow E = E_0 \cos \omega t, \ I = I_0.$$

Замечания: 1) при исследовании дифракции Фраунгофера использовалось свойство *таутохронизма* линзы (линза не вносит дополнительной разности хода для проходящих через неё лучей); 2) дифракционная картина определяется только углом φ , поэтому на неё не влияет положение линзы.



15. Классификация волновых явлений (дифракция Френеля или Фраунгофера, геометрическая оптика). Роль дифракции в формировании оптических изображений. Условия разрешения близких объектов оптическими приборами.

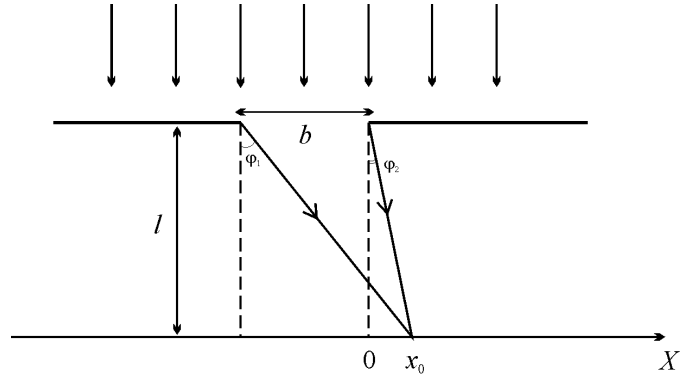
1) Классификация волновых явлений:

Рассмотрим прохождение света через щель ширины b в экране. В точку с координатой x_0 попадают, в частности, лучи от краёв щели. $\text{tg } \varphi_1 = \frac{x_0 + b}{l}$, $\text{tg } \varphi_2 = \frac{x_0}{l}$. Если дифракция наблюдается в параллельных лучах (дифракция Фраунгофера), то $\varphi_1 \approx \varphi_2$, поэтому $x_0 \gg b$.

Данное условие должно выполняться для положения первого минимума:

$$x_{\min} \approx l \sin \varphi_{\min} = \frac{\lambda l}{b}, \text{ где } l - \text{ расстояние до}$$

экрана. Таким образом, необходимым и достаточным условием наблюдения дифракции Фраунгофера является условие $\frac{\lambda l}{b^2} \gg 1$. Из этого условия следует, что $b \ll \sqrt{\lambda l}$, то есть открыта небольшая часть первой зоны Френеля.



Для наблюдения дифракции в скрещивающихся лучах (называемой *дифракцией Френеля*) требуется, чтобы $\varphi_1 \propto \varphi_2$, то есть $x_0 \propto b \Rightarrow \frac{\lambda l^2}{b} \propto 1$; в этом случае открыты несколько зон

Френеля. Если же первый минимум находится вблизи центра экрана $\left(x_0 \ll b \Rightarrow \frac{\lambda l^2}{b} \ll 1 \right)$, то дифракционная картина не наблюдается – реализуется случай *геометрической оптики*, предполагающей прямолинейное распространение света – открыто очень много зон Френеля.

2) Разрешение близких объектов оптическими приборами:

По законам геометрической оптики при попадании лучей на объектив (в простейшем случае он представляет собой щель и стоящую за ней линзу) оптического прибора все проходящие лучи параллельны и собираются в точку на экране (окуляре, фотоплёнке). В реальности всегда происходит дифракция лучей на щели, поэтому изображением источника является пятно угловой полуширины $\varphi = \frac{\lambda}{d}$, где d – ширина объектива. Следовательно, два объ-

екта, находящиеся на расстоянии D друг от друга и L от прибора, будут разрешены, если угловое расстояние между ними превысит угловую ширину изображений объектов:

$$\beta \approx \frac{D}{L} > \varphi = \frac{\lambda}{d}. \text{ Поэтому условие разрешения двух объектов, находящихся на расстоянии } L$$

от прибора: $D > \frac{\lambda L}{d}$. Данное условие означает потерю когерентности лучами от двух объек-

тов (см. 11.4) $d > \frac{\lambda L}{D} = r_k$, что закономерно, поскольку когерентные лучи от двух источников интерферируют и не могут быть разрешены.

Условие первого минимума при дифракции Фраунгофера на круглом отверстии $\varphi \approx 1.22 \frac{\lambda}{d}$, поэтому условие разрешения: $D > 1.22 \frac{\lambda L}{d}$.

16. Дифракционная решётка. Главные и дополнительные максимумы и минимумы дифракционной картины. Характеристики дифракционной решётки как спектрального аппарата: свободная спектральная область, угловая и линейная дисперсии, разрешающая способность. Критерий Рэлея разрешения двух близких спектральных линий.

1) Дифракция света на одномерной решётке:

Рассмотрим дифракцию света на системе параллельных щелей, расстояния между которыми одинаковы (*одномерная дифракционная решётка*). Ширина щелей равна b , а наименьший период повторяемости (*период решётки*) – d . На решётку нормально падает параллельный пучок света; тогда на каждой щели происходит дифракция в параллельных лучах (см. 14.3). Дифракционная картина – результат сложения колебаний, приходящих от каждой из щелей (разность хода для лучей от соседних щелей $d \sin \varphi$). Поэтому задача сводится к сложению N (общее число щелей) колебаний с одинаковыми амплитудами и разными фазами. Воспользуемся методом векторных диаграмм: концы векторов E_1, \dots, E_N лежат на одной окружности, поэтому

$$OA = OB = \frac{E_1}{2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}. \quad \alpha = 2\pi - N \Delta \varphi, \quad \text{поэтому}$$

$$E = 2OA \sin \frac{\alpha}{2} = E_1 \frac{\sin \frac{N \Delta \varphi}{2}}{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}. \quad \text{Из 14.3 } E_1 = E_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}, \quad \text{по-}$$

$$\text{этому в итоге } E = E_0 \frac{\sin \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}}{\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}} \frac{\sin \frac{\pi N d \sin \varphi}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}}; \quad I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}\right)^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi N d \sin \varphi}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}}.$$

Определим положения дифракционных максимумов и минимумов: при выполнении условия минимума для каждой из щелей возникают так называемые главные минимумы: $\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} = \pi m \Rightarrow \sin \varphi = \frac{m \lambda}{b}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Главные дифракционные максимумы возникают в

случае сдвига фаз πn для соседних щелей: $d \sin \varphi = n \lambda \Rightarrow \sin \varphi = \frac{n \lambda}{d}, n \in \mathbb{Z}$ (это условие соответствует равенству нулю числителя и знаменателя во второй дроби выражения для I , предел функции $I(\varphi)$ определяет интенсивность главных максимумов: $I_n = I_0 \left(\frac{Nd}{\pi n b}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi n b}{d}$). Чис-

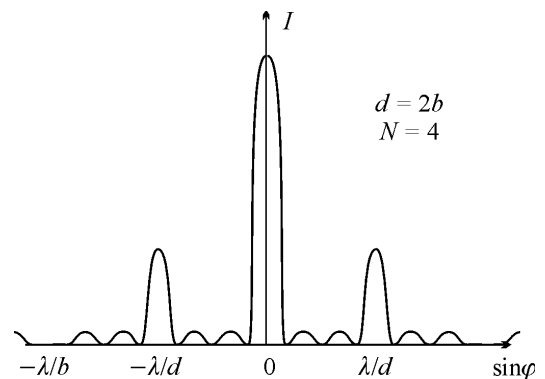
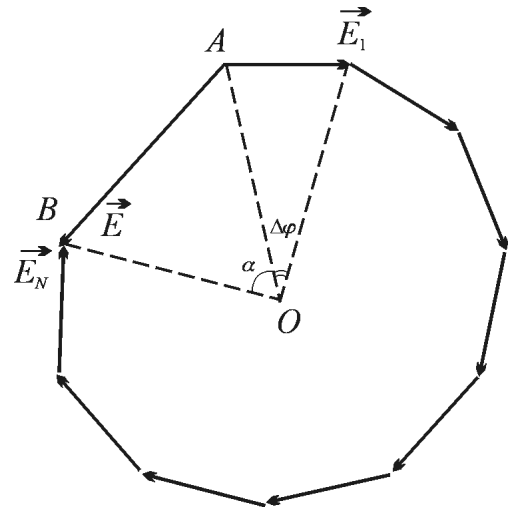
ло n называется порядком главного максимума. В центре дифракционной картины находится максимум нулевого порядка; переходя к пределу в выражении для I , получим, что интенсивность главного максимума $I = N^2 I_0$. Очевидно, что при совпадении положений главных минимумов и максимумов (это возможно, если отношение периода решётки и ширины щели есть рациональная дробь) возникает минимум.

Условие максимума или минимума для $\sin \frac{\pi N d \sin \varphi}{\lambda}$ определяет возникновение дополнительных минимумов и максимумов: минимумы при

$$\sin \varphi = \frac{p \lambda}{Nd}, \quad p \neq mN; m, p \in \mathbb{Z}; \quad \text{максимумы при}$$

$$\sin \varphi = \frac{\left(p + \frac{1}{2}\right) \lambda}{Nd}. \quad \text{Таким образом, между соседними}$$

главными максимумами возникает $(N - 1)$ дополнительных минимумов и $(N - 2)$ дополнительных максимумов. Это позволяет вычислить угло-



вую ширину главных максимумов: $\Delta\varphi_n \approx \frac{2\lambda}{Nd \cos \varphi_n}$.

Наклонное падение лучей на дифракционную решётку (под углом θ) можно представить как нормальное падение на наклонную дифракционную решётку с периодом $d \cos \theta$; дифракционная картина в этом случае аналогична картине, возникающей при нормальном падении лучей.

2) Характеристики дифракционной решётки как спектрального аппарата:

Положения максимумов дифракционной картины на одномерной решётке зависят от длины волны, поэтому при падении на решётку белого света только центральный максимум является белым, а все остальные окрашены – решётка может быть использована как спектральный аппарат.

Свободная спектральная область спектра m -го порядка – область спектра m -го порядка, не накладывающаяся на спектры других порядков. Пусть на решётку падают волны с длинами от λ до $\lambda + \Delta\lambda$; тогда условие «неналожения» спектров m -го, $(m - 1)$ -го и $(m + 1)$ -го порядков: $(m - 1)(\lambda + \Delta\lambda) < m\lambda$; $m(\lambda + \Delta\lambda) < (m + 1)\lambda \Rightarrow \Delta\lambda < \frac{\lambda}{m}$, поэтому свободная спектральная область спектра m -го порядка $\Delta\lambda_c = \frac{\lambda}{m}$; для спектра нулевого порядка ($m = 0$) $\Delta\lambda_c = \infty$.

Угловая дисперсия – угловое расстояние между спектральными линиями, длины волн для которых различаются на 1 \AA . $D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda}$. Продифференцируем условие возникновения главного максимума m -го порядка $d \sin \varphi = m\lambda \Rightarrow d \cos \varphi d\varphi = m d\lambda \Rightarrow D_\varphi = \frac{m}{d \cos \varphi}$. При малых углах φ используют приближённую формулу $D_\varphi \approx \frac{m}{d}$.

Линейная дисперсия – линейное расстояние между спектральными линиями, длины волн для которых различаются на 1 \AA . $D_x = \frac{dx}{d\lambda}$. При малых углах $dx \approx F d\varphi$, где F – фокусное расстояние собирающей линзы, поэтому $D_x \approx F D_\varphi$.

Разрешающая способность – отношение измеряемой длины волны к минимальной разнице длин волн, разрешаемой данным прибором. Согласно критерию Рэлея две волны, длины которых различаются на $\delta\lambda$ могут быть разрешены в случае, если максимум для одной из них совпадает с минимумом для другой, то есть $m(\lambda + \delta\lambda_{\min}) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda \Rightarrow \delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{mN}$, поэтому разрешающая способность дифракционной решётки в спектре m -го порядка $R = mN$. Таким образом, разрешающая способность решётки увеличивается с увеличением числа щелей, однако неограниченное увеличение числа щелей невозможно из-за потери когерентности дифрагировавших лучей.

17. Поляризация волн. Прохождение естественного и плоско поляризованного света через идеальный и неидеальный поляроиды. Закон Малюса. Степень поляризации волн. Поляризация волн при избирательном поглощении. Закон Бугера-Ламберта-Бера.

1) Поляризация волн:

Поляризация волны – нарушение симметрии распределения возмущений относительно направления распространения волны. Очевидно, что поляризация возможна только для по-

перечных волн (см. 9.4); электромагнитные волны «аналогичны» поперечным (направление колебаний перпендикулярно к скорости), поэтому они также могут быть поляризованы. В волнах, испускаемых источниками света, направление колебаний вектора E неупорядоченно; такой – неполяризованный – свет называется *естественным*. Простейшим примером поляризации является прохождение упругих поперечных волн (колебаний верёвки или струны) через узкую щель).

Выделяют эллиптическую поляризацию волны (конец вектора E описывает эллипс в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны) и её частные случаи – циркулярную поляризацию (эллипс вырождается в круг) и линейную (плоскую) поляризацию (эллипс вырождается в прямую). В последнем случае плоскость, проходящая через вектор E и направление распространения луча называется плоскостью поляризации.

Количественной характеристикой поляризации волн служит степень поляризации:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \text{ где } I_{\max} \text{ и } I_{\min} - \text{максимальная и минимальная интенсивности, регистрируемые}$$

при повороте регистрирующего прибора вокруг оси распространения света. Для естественного света $P = 0$, для плоско поляризованного $P = 1$.

2) Поглощение света:

Поглощение – явление уменьшения энергии волны, проходящей через вещество, за счёт её перехода во внутреннюю энергию вещества. Считая, что степень поглощения не зависит от интенсивности проходящей волны, получим $\frac{dI}{I} = \kappa dx$, то есть $I = I_0 e^{-\kappa x}$, где x – толщина слоя вещества. Это соотношение называется законом Бугера-Ламберта. Коэффициент κ – натуральный показатель поглощения; зависимость κ от λ – спектр поглощения вещества.

Если поглощающее вещество растворено в непоглощающем растворителе, то при малых концентрациях выполняется закон Бера: $\kappa = \alpha_0 c$, где c – концентрация растворённого вещества, α_0 – коэффициент, не зависящий от концентрации. В концентрированных растворах закон Бера не выполняется из-за взаимодействия между поглощающими частицами.

Совокупность данных соотношений называют законом Бугера-Ламберта-Бера; при наличии не только поглощения, но и рассеяния (см. 18.2) необходимо введение поправки на экстинкцию (рассеяние) κ' : $I = I_0 e^{-(\kappa + \kappa')x}$.

3) Поляризация волн при избирательном поглощении:

Если в силу особенностей строения вещество сильнее поглощает свет в одних направлениях и слабее – в других (анизотропия поглощения), то происходит частичная поляризация света; направление поляризации соответствует направлению наименьшего поглощения.

Поляризаторы (поляроиды) – вещества, при прохождении через которые свет частично поляризуется. Примером поляроидов являются вещества, избирательно поглощающие свет в каком-либо направлении, – кристаллы турмалина и плёнки поливинилового спирта или полипропилена. Плоскость, в которой поляризатор лучше пропускает свет, называется главной плоскостью поляроида.

Поляроид считается идеальным, если он полностью (без потери энергии) пропускает лучи, вектор E в которых колеблется в главной плоскости, и не пропускает лучи, в которых вектор E перпендикулярен к этой плоскости. После прохождения параллельного пучка естественного света через идеальный поляризатор свет становится линейно поляризованным. Реальные поляризаторы не являются идеальными и на выходе дают лишь частично поляризованный свет. При падении на идеальный поляризатор плоско поляризованного света амплитуда колебаний вектора E после прохождения через поляроид $E = E_0 \cos \varphi$, где E_0 – амплитуда колебаний до прохождения, φ – угол между плоскостью поляризации света и главной

плоскостью поляроида. Тогда $I = I_0 \cos^2 \varphi$ – закон Малюса (выполняется только для идеальных поляризаторов).

Поляроиды используют не только для поляризации естественного света, но и для анализа света поляризованного (например, для определения степени поляризации). В этом случае их называют анализаторами.

18. Закономерности излучения диполя. Поляризация света при отражении от поверхности диэлектрика. Угол Брюстера. Поляризация рассеянного света. Рассеяние мутными средами и молекулярное рассеяние. Закон Рэлея. Представление о рассеянии Ми.

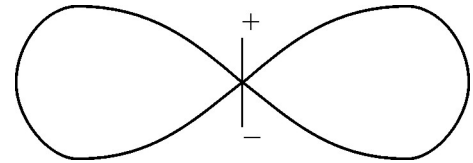
1) Излучение диполя:

Колебания электронов в атомах удобно представлять как колебания диполей: ядро – неподвижный положительный заряд, а электроны перемещаются вокруг ядра. В простейшем случае отрицательный заряд движется вдоль одной прямой так, что дипольный момент изменяется по гармоническому закону: $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t$. Тогда излучение диполя есть излучение движущегося заряда.

Всякий движущийся заряд можно считать элементом тока, при этом $i = \dot{\xi}$. По закону Био-Савара-Лапласа магнитная индукция возникающего поля $d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi r^3} [i\vec{dl}, \vec{r}]$; вектор B изменяется по закону $\vec{B}(t) \sim [\vec{p}_0 \vec{r}] \ddot{\xi} \sim \ddot{\xi} \sin \theta$, где θ – угол между направлением движения заряда и направлением на точку наблюдения.

$E \sim \frac{dB}{dt} \sim \ddot{\xi} \sin \theta \Rightarrow I \sim \ddot{\xi}^2 \sin^2 \theta \sim \omega^4 \sin^2 \theta$. Таким образом,

диполь излучает максимальную энергию в направлениях, перпендикулярных к своей оси и не излучает вдоль оси. Пространственная картина называется диаграммой направленности излучения диполя, может быть получена вращением плоской картины, представленной на рисунке, и представляет собой деформированный тороид.



Из закона Био-Савара-Лапласа следует, что вектор B перпендикулярен к плоскости, проходящей через ось диполя и направление на точку наблюдения; это означает, что излучение диполя плоскополяризовано, причём плоскость поляризации – плоскость, проходящая через ось диполя и направление излучаемых волн.

2) Поляризация света при отражении:

Плоскость падения – плоскость, проходящая через падающий луч и нормаль к поверхности в точке падения. Если луч, плоскость поляризации которого совпадает с плоскостью падения, падает на границу раздела двух диэлектрических фаз, то во второй фазе возбуждаются колебания диполей, совпадающие по направлению с осью колебаний вектора E . Отражённую и преломлённую волны можно считать результатом интерференции волн, излучаемых колеблющимися диполями. По законам геометрической оптики угол падения равен углу отражения, однако при определённом угле падения направление отражённого луча окажется перпендикулярным к направлению колебаний диполя. Поэтому отражение происходит не будет. Такой угол называется углом Брюстера α_B .

Пусть β_B – угол преломления, соответствующий углу Брюстера; тогда из закона преломления $\frac{\sin \alpha_B}{\sin \beta_B} = \frac{n_2}{n_1}$, а из условия отсутствия отражения $\alpha_B + \beta_B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \beta_B = \cos \alpha_B$;

$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}$. Явление отсутствия отражения при падении плоскополяризованного света под

углом Брюстера используется в лазерах – при многократном прохождении луча через трубку с активным веществом требуется отсутствие отражения на поверхности трубки; для этого окна, через которые проходят лучи, располагают по отношению к ним наклонно – под углом Брюстера.

Если плоскость падения перпендикулярна к плоскости поляризации, то диполи также будут колебаться в этой плоскости – произойдёт интерференция излучаемых волн с образованием отражённого и преломлённого лучей – ни тот, ни другой не окажется погашенным, но оба будут поляризованы также, как и падающий пучок. Таким образом, при падении на границу раздела фаз естественного света под углом Брюстера происходит поляризация отражённого света в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения и частичная поляризация преломлённых лучей.

3) *Рассеяние света:*

Рассеяние света – преобразование света веществом, сопровождающееся изменением направления и, возможно, частоты света, проявляющееся как несобственное свечение вещества. Рассеяние – результат интерференции волн, излучаемых колеблющимися диполями, поэтому рассеяние наблюдается не во всех случаях. В достаточно плотной (расстояние между соседними частицами много меньше длины волны) оптически однородной среде каждому излучателю соответствует другой – отстоящий от первого на $\lambda/2$. Соответственно, эти диполи «гасят» друг друга – рассеяние не происходит. Для наблюдения рассеяния необходимы либо неоднородная, либо сильно разреженная среда. В первом случае наблюдается рассеяние *мутными средами*, во втором – *молекулярное рассеяние*.

При попадании луча естественного света на рассеивающую среду возбуждаются колебания диполей; из-за неполяризованности исходного пучка диполи колеблются вдоль всех направлений, лежащих в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения луча. Излучения диполей, колеблющихся вдоль параллельных прямых, плоско поляризованы, поэтому рассеянный свет будет частично поляризован, а рассеянный под углом $\pi/2$ к вектору скорости – плоско поляризован. При падении на рассеивающую среду плоскополяризованного луча все диполи вещества будут колебаться вдоль одного направления, поэтому рассеянный свет будет также плоско поляризован.

При молекулярном рассеянии результирующий луч можно рассматривать как результат интерференции излучений диполей, поэтому $I_p \sim \omega^4 \sim \lambda^{-4}$ – закон Рэлея. *Примеры* молекулярного рассеяния – прохождение лучей Солнца через атмосферу Земли; коротковолновое излучение сильнее рассеивается, вызывая голубой цвет неба, а длинноволновое излучение преимущественно проходит сквозь атмосферу, обуславливая красный цвета восходящего и заходящего Солнца.

В мутных средах (дымах, аэрозолях, суспензиях, эмульсиях), состоящих из небольших частиц $\left(d \leq \frac{1}{15} \lambda \right)$, также выполняется закон Рэлея; рассеяние носит название явления Тиндаля. При больших размерах частиц рассеянное излучение всё сильнее «гасится» интерференцией, его интенсивность почти не зависит от частоты. Такое рассеяние называется рассеянием Ми.

Возможно также рассеяние с изменением частоты света – так называемое комбинаторное рассеяние; изменение частоты связано с модуляцией колебаний электронов рассеянным излучением. *Примером* комбинаторного рассеяния служит *комптоновское рассеяние* рентгеновских лучей на лёгких атомах.

19. Прохождение светового луча через анизотропное одноосное вещество. Главная оптическая ось. Обыкновенный и необыкновенный лучи. Волновые поверхности для обыкновенных и необыкновенных волн в анизотропном веществе. Получение и анализ эллиптически и циркулярно поляризованного света. Левая и правая поляризации. Кристаллические пластинки $\lambda/2$ и $\lambda/4$.

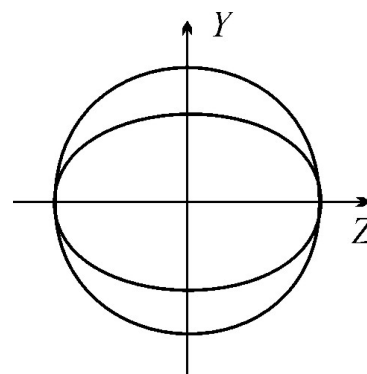
1) *Двойное лучепреломление:*

Многие кристаллы обладают свойством *оптической анизотропии*, то есть по-разному пропускают свет вдоль разных направлений. Причиной этого эффекта является различие периодов решётки кристалла вдоль разных осей. Рассмотрим только так называемые *одноосные* кристаллы, в которых имеется одно выделенное направление, а все направления, перпендикулярные к выделенному, эквивалентны. Выделенное направление называется оптической осью кристалла. Поляризация одноосного кристалла будет происходить по-разному вдоль разных направлений, поэтому диэлектрическая проницаемость (и, значит, показатель преломления) будет зависеть от направления. Показатель преломления вдоль оптической оси (Z) обозначается как n_e , а в перпендикулярных направлениях – n_o . Пространственная зависимость показателя преломления кристалла от направления колебаний E имеет вид эллипсоида вращения с полуосями n_e и n_o . Если $n_e < n_o$, то кристалл называется отрицательным; если $n_e > n_o$ – положительным.

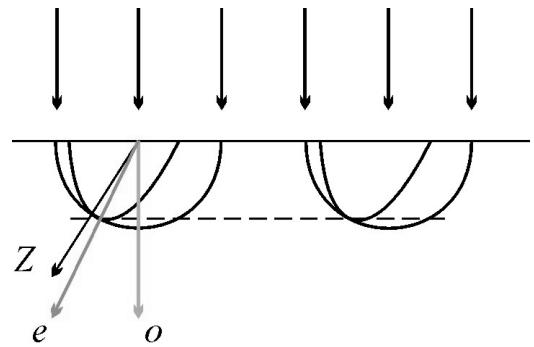
Главная оптическая плоскость – плоскость, проходящая через ось кристалла и луч падающего света. Пусть на кристалл падает плоскополяризованный свет; тогда если плоскость поляризации перпендикулярна к главной оптической плоскости, то луч будет преломляться с показателем n_o . Такой луч называют обыкновенным. Если же плоскость поляризации параллельна главной оптической плоскости, то луч называют необыкновенным. Показатель преломления для этого луча зависит от направления распространения – при распространении вдоль оптической оси кристалла – n_e ; при распространении в перпендикулярном направлении – n_o . При произвольной ориентации плоскости поляризации падающего луча в кристалле будут возбуждены колебания как в главной оптической плоскости, так и перпендикулярно к ней. В результате падающий луч разделится на обыкновенный и необыкновенный лучи, поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях. Тот же эффект можно наблюдать при падении на кристалл естественного света (за исключением случая падения вдоль оптической оси – здесь не происходит разделение луча на обыкновенный и необыкновенный). Эффект разделения луча при попадании на оптически анизотропный кристалл называют двойным лучепреломлением.

Обыкновенный луч одинаково распространяется во всех трёх направлениях, поэтому его *волновые поверхности* имеют сферическую форму. Необыкновенный луч распространяется в одном из направлений медленнее (для положительных) или быстрее (для отрицательных кристаллов), поэтому *волновые поверхности* имеют форму эллипсоидов вращения (на рисунке представлены волновые поверхности для положительного кристалла; Z – оптическая ось).

Для определения хода обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле воспользуемся принципом Гюйгенса (см. 14.1): луч нормально падает на поверхность кристалла, а оптическая ось проходит под углом к этой нормали. Волновые поверхности обыкновенного луча – сферы, поэтому он проходит, не преломляясь. Волновые поверхности необыкновенного луча – эллипсоиды, вытянутые вдоль оптической оси (рассматриваем случай положительного кристалла); тогда фронт необыкновенной волны проходит под углом к нормали, то есть необыкновенный луч преломляется при нормальном падении. Если же оптическая ось перпендикулярна к нормали, то необыкновенный луч также проходит, не преломляясь, но преодолевает кристалл с меньшей скоростью из-за большего показателя преломления. При наклонном падении луча на поверхность кри-



стала обыкновенный луч преломляется в соответствии с законом преломления, а преломлённый необыкновенный луч не лежит в плоскости падения, что, очевидно, противоречит, закону преломления. Нарушение закона преломления для необыкновенного луча обуславливает его название.



2) *Получение и анализ циркулярно и эллиптически поляризованного света:*

Как было показано в 19.1 при нормальном падении плоско поляризованного света на кристалл, грань которого вырезана вдоль оптической оси, происходит разделение света на обыкновенный и необыкновенный лучи, поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях. При этом лучи «наберут» оптическую разность хода $\Delta = d |n_e - n_o|$, определяющую разность фаз $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta$ – см. 11.1 (d – толщина

кристаллической пластинки). Наложение взаимно перпендикулярных колебаний рассмотрено в 4.2 – при произвольной разности фаз выходящий свет будет *эллиптически поляризован*;

при $\Delta\varphi = \pi m$ свет будет *линейно поляризован*, а при $\Delta\varphi = \frac{2m+1}{2}\pi$ и равенстве амплитуд

обыкновенного и необыкновенного лучей – *циркулярно поляризован*. Поляризация (эллиптическая или циркулярная) называется левой, если направления вращения и распространения соответствуют правилу правого буравчика; в противном случае поляризация называется правой.

Для получения и анализа поляризованного света используют специально изготовленные кристаллические пластинки. Если пластинка создает разность хода лучей $\Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0$

(пластинка в «полволны»), то в плоско поляризованном свете, попавшем на такую пластинку, изменяется направление поляризации: при угле между главной оптической плоскостью и плоскостью поляризации α происходит симметричный поворот относительно главной оптической плоскости на 2α (всякий плоско поляризованный свет можно рассматривать как результат наложения взаимно перпендикулярных колебаний – для одного из лучей возникнет разность фаз π (изменится направление), поэтому поворот плоскости поляризации составит 2α).

Пластинки в «четвертьволны» создают разность хода $\Delta = \left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda_0$ и преобразуют

плоско поляризованный свет в эллиптически поляризованный, оси которого направлены вдоль оптической оси и перпендикулярно к ней. При попадании на такую пластинку эллиптически поляризованного света так, что одна из осей поляризации направлена вдоль оптической оси (то есть, по сути, двух лучей, плоско поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях) получается плоско поляризованный свет. При падении на такую же пластинку естественного света каждый из составляющих этот свет лучей поляризуется эллиптически. В результате поляризация луча в целом по-прежнему отсутствует, но концы всех векторов E совершают эллиптические колебания.

Если на кристаллическую пластинку падает некогерентный свет (содержащий волны с длинами (в вакууме) от λ_0 до $(\lambda_0 + \Delta\lambda_0)$), то для эллиптической поляризации требуется когерентность: $\Delta < l_k = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0} \Rightarrow d < \frac{l_k}{\Delta n} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta n \cdot \Delta\lambda}$.

Для *анализа* поляризации света используют поляроиды (см. 17.3) и кристаллические пластинки в «четвертьволны». Плоско поляризованный свет при определённой ориентации не проходит через один поляроид, зато частично плоско поляризованный свет (как и эллиптически поляризованный) всегда проходит через поляроид с образованием максимумов и

минимумов интенсивности при повороте. Для определения таких волн используют пластинки в «четвертьволны», ориентированные вдоль оси поляроида, для которой получен максимум (или минимум) интенсивности с одним поляроидом: после прохождения такой пластинки эллиптически поляризованный свет становится плоско поляризованным, а частично плоско поляризованный – эллиптически поляризованным. В первом случае свет не всегда проходит через второй поляроид, во втором – проходит всегда. Аналогично различают циркулярно поляризованный свет и естественный.

20. Интерференция поляризованных лучей. Условия наблюдения интерференции. Цвета кристаллических пластинок. Коноскопия. Искусственная оптическая анизотропия: фотоупругость, электро- и магнитооптические эффекты (Поккельса, Керра, Коттона-Мутона).

1) Интерференция поляризованных лучей:

Пусть плоско поляризованный свет падает на грань одноосного оптически анизотропного кристалла, вырезанную вдоль оптической оси. Тогда на выходе получим обыкновенный и необыкновенный лучи, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях (см. 19.1). Эти лучи имеют определённую разность хода, но не интерферируют: энергия не перераспределяется в пространстве (если $E^2 = E_y^2 + E_z^2 \Rightarrow I_0 = E_{y0}^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle + E_{z0}^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{E_{y0}^2 + E_{z0}^2}{2}$, то $I = I_o + I_e = E_{y0}^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle + E_{z0}^2 \langle \cos^2 (\omega t + \Delta\varphi) \rangle = \frac{E_{y0}^2 + E_{z0}^2}{2} = I_0$). Для наблюдения интерференции поляризованных лучей необходимо пропустить их через поляроид, расположенный наклонно к главной оптической плоскости. Этот поляроид выделит составляющие обыкновенного и необыкновенного лучей, поляризованные в одной и той же плоскости; тогда характер интерференционной картины определится разностью хода этих лучей: $\Delta = |n_e - n_o|d$.

Выделяют два *интерференционных эффекта* для поляризованных лучей:

1. Цвета тонких плёнок: если на кристаллическую пластинку падает пучок плоско поляризованного белого света, то для разных длин волн формы и ориентации эллипсов поляризации окажутся различны, поэтому и доля лучей разных цветов после прохождения поляроида различна. В результате, при наблюдении кристаллической пластинки через поляроид она будет преимущественно окрашена в какой-либо цвет (обусловленной волной с длиной λ). При повороте поляроида на угол $\pi/2$ этот цвет изменится на дополнительный, поскольку поляроид почти не будет пропускать волны длины λ . Если пластинка имеет переменную толщину, то области разной толщины окажутся окрашенными в разные цвета – возникают полосы равной толщины.

2. Полосы равного наклона: если на кристаллическую пластинку, вырезанную перпендикулярно к оптической оси, падает сходящийся пучок плоско поляризованного света, то для некоторых α будут реализовываться условия максимума – при наблюдении через поляроид на пластинке будут видны светлые и тёмные кольца, а в центре – белое пятно (центральный луч пучка распространяется вдоль оптической оси, поэтому он не испытывает двойного лучепреломления). Поскольку все лучи, плоскость колебаний которых параллельна (или перпендикулярна) оптической оси кристалла, на выходе «дают» только необыкновенные (обыкновенные) лучи и не интерферируют, интерференционная картина пересечена белым крестом. Более удобно наблюдение этой картины в скрещенных поляроидах (крест – тёмный) или в свете лазера. По интерференционному кресту можно правильно установить кристалл, что используется в методе коноскопии.

2) Искусственная оптическая анизотропия:

Искусственная оптическая анизотропия может возникнуть при каком-либо разупорядо-

чении структуры изотропного вещества; например:

1. Пьезоэлектрический эффект (*фотоупругость*): при приложении к изотропному твёрдому телу механического напряжения появляется оптическая анизотропия – это связано с искажением (растяжением или сжатием) кристаллической решётки, ведущем к возникновению оптических осей. Эффект линеен по напряжению: $n_e - n_o = k_1 \sigma$, где k_1 – упругооптическая постоянная (*постоянная Брюстера*); для стёкол $k_1 \approx 10^{-11} - 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$. Линейная зависимость выполняется только при не очень больших напряжениях. Эффект используют для изучения распределения механических напряжений в твёрдых телах.

2. Электрооптические эффекты: при помещении изотропного вещества в электрическое поле может возникнуть оптическая анизотропия. Существует два типа электрооптических эффектов: эффект Погкельса (линейный) и эффект Керра (квадратичный).

Эффект Погкельса наблюдается только в *пьезоэлектрических кристаллах*, то есть кристаллах, где сжатие или растяжение вдоль определённых направлений вызывает поляризацию (*прямой пьезоэффект*) или электрическое поле вызывает сжатие или растяжение по определённым направлениям (*обратный пьезоэффект*). Для эффекта Погкельса $n_e - n_o = k_2 E$, где k_2 – *постоянная Погкельса*. Этот эффект наблюдается в таких веществах, как LiNbO_3 ($k_2 = 3.7 \cdot 10^{-10} \text{ м/В}$), KN_2PO_4 , $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$.

Эффект Керра наблюдается в жидкостях, стёклах и кристаллических веществах (не пьезоэлектриках). При приложении внешнего поля появляется оптическая ось, направленная вдоль поля. $n_e - n_o = k_3 E^2$, где k_3 – *постоянная Керра* (для нитробензола $k_3 = 10^{-18} \text{ м}^2/\text{В}^2$). Физическая причина эффекта Керра состоит в ориентации молекул (или других структурных элементов вещества) и искажении электронных оболочек в электрическом поле. В первом случае наблюдается *ориентационный эффект Керра* (проявляется для веществ, состоящих из полярных частиц), во втором – *поляризационный* (для веществ, состоящих из неполярных, но легко поляризуемых молекул). Эффект Керра можно наблюдать, пропуская луч света через вещество, облучаемое лазером – в этом случае луч лазера влияет на распространение луча обычного света, то есть нарушается принцип суперпозиции.

Электрооптический эффект используется для изготовления *оптических затворов* – свет пропускают через скрещенные поляризаторы, между которыми расположена пластинка оптически изотропного вещества. В отсутствии внешнего электрического поля свет не проходит; при наложении поля определённой напряжённости пластинка превращается в пластинку в «полволны» и система пропускает свет. Такие устройства можно использовать для модуляции светового потока, необходимой в оптической передаче информации, – для этого больше подходят пьезоэлектрики, так как эффект линеен, а время релаксации очень мало по сравнению с релаксацией ориентированных молекул (возможна модуляция сигналов высоких частот).

3. Магнитооптический эффект (*эффект Коттона-Мутона*):

Данный эффект полностью аналогичен эффекту Керра; $n_e - n_o = k_4 B^2$, где k_4 – *постоянная Коттона-Мутона* (наибольшие величины $k_4 = 10^{-6} - 10^{-7} \text{ Гл}^{-2}$ для коллоидных растворов и жидких кристаллов). Малые значения постоянной не позволяют практически использовать данный эффект.

Замечание: постоянные Брюстера, Погкельса, Керра и Коттона-Мутона могут быть как положительными, так и отрицательными и зависят от длины волны света.

21. Оптическая активность кристаллов и молекул. Оптические антиподы и изомеры. Положительные и отрицательные оптически активные вещества. Закон Био. Гипотеза Френеля. Искусственная оптическая активность (эффект Фарадея).

1) *Виды оптической активности*:

Оптическая активность – явление поворота плоскости поляризации линейно поляризо-

ванного света при прохождении через вещество.

Существует *два вида* оптической активности – одни вещества оптически активны в любом агрегатном состоянии (они образованы *хиральными*, то есть оптически активными молекулами – например, молочная кислота), другие – только в кристаллическом. В первом случае оптическая активность связана с отсутствием центра инверсии у молекул, во втором – с отсутствием центра инверсии в кристаллической структуре (при этом вещество может иметь немолекулярное строение; например, кварц).

Оптически активные молекулы могут существовать в виде двух форм – оптических изомеров. Оптические изомеры – это несовместимые друг с другом зеркальные изображения; они могут встречаться порознь, обуславливая оптическую активность жидкости, газа или твёрдого тела, а могут в равных количествах находиться в смеси, образуя *рацемат*. Для разделения оптических изомеров используют реакции с оптически активными реагентами или биохимические способы. Если оптическая активность обусловлена кристаллической структурой вещества, то соответствующие модификации называют оптическими антиподами.

Оптический изомер (или антипод) называют положительным, если он вращает плоскость поляризации вправо (для наблюдателя, смотрящего навстречу лучу); левовращающие изомеры называют отрицательными.

2) Количественные характеристики оптической активности:

Если оптическая активность обусловлена строением молекулы, то вещество сохраняет свою оптическую активность при растворении в неактивном растворителе; при этом угол поворота определяется соотношением (закон Био): $\alpha = [\alpha]lc$, где $[\alpha]$ – удельная оптическая активность (удельное вращение), l – путь, пройденный лучом в растворе, c – концентрация. Удельная оптическая активность зависит от длины волны света и обычно указывается для жёлтой линии натрия (обозначается $[\alpha]^D$). Измерения оптической активности используют для определения строения оптически активных молекул (метод *поляриметрии*).

Для кристаллических веществ закон Био принимает форму $\alpha = [\alpha]l$. Величина удельной оптической активности зависит от разных факторов – температуры, давления, растворителя.

3) Объяснение оптической активности:

Для объяснения оптической активности предложена *гипотеза Френеля*: предполагают, что в оптически активных веществах правый и левый циркулярно поляризованный свет распространяются с разными скоростями (что вполне объяснимо, например, для кварца, где оптическая активность обусловлена наличием осей Z_1 или Z_2 ; быстрее распространяется тот свет, в котором направление вращения совпадает с направлением закручивания оси симметрии). Плоско поляризованную волну можно рассматривать как результат наложения двух волн, циркулярно поляризованных в противоположных направлениях; амплитуда каждой из таких волн равна половине амплитуды результирующей волны. При попадании в оптически активное вещество две составляющие волны будут перемещаться с разными скоростями, поэтому к моменту выхода из вещества поворот вектора E в одной из составляющих окажется больше на $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$, $\Delta = d(n_+ - n_-)$. В результате суммарный вектор повернётся на угол

$\alpha = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi\Delta}{\lambda}$. Положительные значения α соответствуют правовращающему веществу, отрицательные – левовращающему.

Таким образом, оптическая активность является примером оптической анизотропии и может быть вызвана искусственно – в магнитном поле. Такой эффект называют эффектом Фарадея – для поворота плоскости поляризации необходимо направить луч вдоль направления магнитного поля. $n_+ - n_- = k_5 l B$, где l – путь, пройденный в веществе; k_5 – *постоянная Верде* (зависит от длины волны света и температуры). Возникновение оптической активно-

сти в магнитном поле характерно для всех веществ, однако обычно возникающий эффект чрезвычайно мал; хороший результат может быть получен в ферромагнетиках, внутри которых поле дополнительно усиливается.

Искусственное возникновение оптической активности обусловлено индуцированием кругового движения электронов в магнитном поле. В таком веществе быстрее распространяется свет, циркулярно поляризованный в направлении движения электронов (то есть направлении вращения электрического поля). Это направление определяется направлением магнитного поля, поэтому знак угла вращения плоскости поляризации не зависит от направления распространения луча, то есть для поворота плоскости поляризации можно использовать многократное отражение света от магнита.